SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Hrvoje Stojanović

TOPOLOŠKE BAZE BANACHOVIH PROSTORA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Damir Bakić

Zagreb, srpanj, 2015.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

U ovome radu će se prikazati neki temeljni rezultati o topološkim bazama Banachovih prostora. Topološke baze se razlikuju od običnih ili Hamelovih baza vektorskih prostora po tome što se dopuštaju beskonačne (prebrojive, indeksirane po $\mathbb{N}$) sume pri zapisu vektora preko baze pa su zato one prirodniji alat za proučavanje beskonačnodimenzionalnih prostora. Konvergenciju tih suma definiramo preko norme pa topološke baze promatramo na normiranim prostorima. U ovome radu promatrat će se samo topološke baze na normiranim prostorima koji su potpuni, tj. na Banachovim prostorima.

U prvom poglavlju će biti navedeni temeljni rezultati iz teorije normiranih prostora koji će biti glavni alati za dokazivanje teorema u kasnijim poglavljima te još neki pomoćni rezultati koji će biti korišteni.

U drugom poglavlju će biti navedeni i dijelom dokazani rezultati vezani uz konvergenciju redova u normiranim prostorima. Bit će opisane međusobne veze između sumabilnosti, apsolutne konvergencije i bezuvjetne konvergencije. Ti rezultati će biti ključni za sadržaj četvrtog poglavlja.

U trećem poglavlju bit će izložen glavni dio ovoga rada. Bit će dokazani temeljni rezultati vezani uz topološke baze na Banachovim prostorima i neke druge nizove koji su bliski topološkim baza po svojstvima. Na početku će biti dokazano ključno svojstvo topoloških baza, činjenica da za sve topološke baze vrijedi da su koeficijenti pri zapisu vektora preko baze neprekidni (s obzirom na te vektore), tj. da su sve topološke baze Schauderove baze. To svojstvo će biti presudno za ostale rezultate.

U četvrtom poglavlju bit će predstavljena jedna posebna klasa topoloških baza: bezuvjetne baze, tj. one baze za koje konvergencija ne ovisi o poretku elemenata baze.

Poglavlje 1

Korištene oznake, definicije i teoremi

Napomena 1.0.1. *Osnovni pojmovi iz teorije normiranih prostora korišteni u ovom radu (poput polje $\mathbb{F}$, norma, skalarni produkt, potpunost, Banachov prostor, Hilbertov prostor, neprekidnost/ograničenost linearnih operatora, itd.) će biti korišteni u smislu u kakvom su definirani u [1].*

1.1 Osnovni rezultati teorije normiranih prostora

Teorem 1.1.1. *Neka je X normiran prostor i $\hat{\cdot} : X \to X^{**}$ definirano s $\hat{x}(f) = f(x)$, $\forall f \in X^*$, $\forall x \in X$. Tada vrijedi:*
(a) $(\overline{\mathrm{Im}\,\hat{\cdot}}, \hat{\cdot})$ je upotpunjenje od X.
(b) Ako je X unitaran prostor onda je njegovo upotpunjenje Hilbertov prostor.
(c) Ako su (Y_1, ϕ_1) i (Y_2, ϕ_2) upotpunjenja od X onda postoji jedinstveni izometrički izomorfizam $\theta : Y_1 \to Y_2$ takav da vrijedi $\theta\phi_1 = \phi_2$.

Dokaz. [1, str. 20, Teorem 1.4.2 i str. 66] □

Teorem 1.1.2. ***(Banach-Steinhausov teorem, princip uniformne ograničenosti)*** *Neka je X Banachov i Y normiran prostor i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{B}(X, Y)$ proizvoljan. Pretpostavimo da vrijedi* $\sup\{\|Tx\| : T \in \mathcal{F}\} < +\infty$, *$\forall x \in X$. Tada vrijedi i* $\sup\{\|T\| : T \in \mathcal{F}\} < +\infty$.

Dokaz. [1, str. 86, Teorem 5.3.2] □

Teorem 1.1.3. ***(Teorem o inverznom preslikavanju)*** *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je $A \in \mathbb{B}(X, Y)$. Tada je i A^{-1} ograničen.*

Dokaz. [1, str. 100, Teorem 6.1.3 i str. 101, Teorem 6.1.9] □

1.2 Hahn-Banachov teorem i neke posljedice

Teorem 1.2.1. ***(Hahn-Banachov teorem)*** *Neka je X normiran prostor i $Y \leqslant X$ pravi potprostor od X. Za svaki $f_0 \in Y^*$ postoji $f \in X^*$ takav da vrijedi $f\big|_Y = f_0$ i $\|f\| = \|f_0\|$.*

Dokaz. [1, str. 63, Teorem 4.1.5] □

Korolar 1.2.2. *Neka je X normiran prostor i $x \in X$. Tada je $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\| = 1\}$ pri čemu se supremum postiže.*

Dokaz. [1, str. 64, Korolar 4.2.2] □

Korolar 1.2.3. *Neka je X_0 potprostor normiranog prostora X i neka je $x_1 \in X$ takav da je $d = d(x_1, X_0) > 0$. Tada postoji $f \in X^*$ takav da je $\|f\| = 1$ i da vrijedi $f(x_1) = d$ i $f(x) = 0$, $\forall x \in X_0$.*

Dokaz. [1, str. 65, Teorem 4.2.3] □

Korolar 1.2.4. *Neka je X_0 zatvoreni potprostor normiranog prostora X i neka je $x_1 \in X \backslash X_0$. Tada postoji $g \in X^*$ takav da vrijedi $g(x_1) = 1$ i $g(x) = 0$, $\forall x \in X_0$.*

Dokaz. X_0 je zatvoren i $x_1 \notin X_0$ pa je $d = d(x_1, X_0) > 0$. Sada primjenimo 1.2.3 pa je $g = \frac{1}{d} f$ traženi funkcional. □

Korolar 1.2.5. *Podskup E normiranog prostora X je fundamentalan ako i samo ako je nul-funkcional jedini ograničeni funkcional na X koji iščezava na E.*

Dokaz. [1, str. 65, Korolar 4.2.4] □

1.3 Adjungirani operatori na Banachovim prostorima

Teorem 1.3.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori i $T \in \mathbb{B}(X, Y)$. Tada postoji jedinstven operator $T^* \in B(Y^*, X^*)$ takav da vrijedi:*

$$f(Tx) = (T^* f)(x), \quad \forall x \in X, \forall f \in Y^*. \tag{1.1}$$

Tada je $\|T^*\| = \|T\|$ i T^* se naziva adjungirani operator od T.
Ako je T izomorfizam, onda je i T^* izomorfizam.

Dokaz. Za $f \in Y^*$ proizvoljan definiramo funkcional $g : X \to \mathbb{F}$ s $g = fT$ pa je g neprekidan linearni funkcional. Neka je sada $T^* : Y^* \to X^*$ definiran preslikavanjem $f \mapsto g$. Tada vrijedi $T^*f = fT$, $\forall f \in Y^*$ pa T^* zadovoljava (1.1). T^* je očito linearan. Vrijedi za $f \in Y^*$ proizvoljan:

$$\|T^*f\| = \|fT\| \leqslant \|f\|\|T\| = \|T\|\|f\|,$$

pa je $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. Također je za $x \in X$ proizvoljan:

$$\|Tx\| \underset{1.2.2}{=} \sup_{\|f\|=1} |f(Tx)| = \sup_{\|f\|=1} |(T^*f)(x)| \leqslant \sup_{\|f\|=1} \|T^*\| \underbrace{\|f\|}_{=1} \|x\| = \|T^*\|\|x\|,$$

pa vrijedi $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. Dakle, $\|T\| = \|T^*\|$.
Pretpostavimo da postoji $S \in B(Y^*, X^*)$ koji zadovoljava (1.1). Tada je:

$$\begin{aligned} &(Sf)(x) = (T^*f)(x), \quad \forall x \in X, \forall f \in Y^* \\ \Longrightarrow &Sf = T^*f, \quad \forall f \in Y^* \\ \Longrightarrow &S = T^*, \end{aligned}$$

pa je zato T^* jedinstven.
Zbog jedinstvenosti za identitetu vrijedi $I^* = I$ (na odgovarajućim prostorima) jer zadovoljavaju (1.1). Ako su A i B ograničeni linearni operatori koji se mogu komponirati onda iz (1.1) imamo $f(ABx) = A^*f(Bx) = A^*B^*f(x)$ pa zbog jedinstvenosti vrijedi $(AB)^* = B^*A^*$. Konačno, ako je A izomorfizam, tada:

$$AA^{-1} = I, A^{-1}A = I \quad \Longrightarrow \quad (A^{-1})^*A^* = I, A^*(A^{-1})^* = I,$$

pa je i A^* izomorfizam. $\square$

1.4 Carathéodoryjev teorem

Teorem 1.4.1. *(Carathéodoryjev teorem) Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^d$ i $x \in conv(S)$. Tada postoje $c_1, \ldots, c_{d+1} \geqslant 0$ i $x_1, \ldots, x_{d+1} \in S$ takvi da vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^{d+1} c_k = 1 \quad i \quad x = \sum_{k=1}^{d+1} c_k x_k.$$

Dokaz. [2, str. 10, (2.3)] $\square$

Korolar 1.4.2. *Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ takvi da za svaki vrijedi $|\lambda_n| \geqslant 1$. Tada postoje $c_k \geqslant 0$ i $\epsilon_{k,n} \in \{-1, +1\}$ za $k = 1, \ldots, N+1$ i $n = 1, \ldots, N$ takvi da vrijedi:*

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k = 1 \quad i \quad \sum_{k=1}^{N+1} \epsilon_{k,n} c_k = \lambda_n \quad za\ sve\ n = 1, \ldots, N.$$

Dokaz. Primjenimo 1.4.1 za $d = N$, $x = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ i $S = \{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N) : \epsilon_1, \ldots, \epsilon_N \in \{-1, 1\}\}$. Sada još samo označimo $x_k = (\epsilon_{k,1}, \ldots, \epsilon_{k,N})$ za sve $k = 1, \ldots, N+1$. $\square$

Poglavlje 2

Konvergencija redova

2.1 Sumabilnost

Definicija 2.1.1. *Uređen par $(A, \leqslant)$ naziva se usmjeren skup ako je A neprazan skup i $\leqslant$ binarna relacija na A za koju vrijedi:*
(a) $\leqslant$ je refleksivna, tj. $\alpha \leqslant \alpha$, $\forall \alpha \in A$,
(b) $\leqslant$ je tranzitivna, tj. $\alpha \leqslant \beta$ i $\beta \leqslant \gamma$ povlači $\alpha \leqslant \gamma$, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A$,
(c) $\forall \alpha, \beta \in A$, $\exists \gamma \in A$ takav da vrijedi $\alpha \leqslant \gamma$ i $\beta \leqslant \gamma$.

Propozicija 2.1.2. *Neka je J beskonačan skup i $\mathcal{F}$ familija svih njegovih konačnih podskupova. Neka je $\leqslant$ binarna relacija na $\mathcal{F}$ definirana za $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ s: $F_1 \leqslant F_2$ ako i samo ako $F_1 \subseteq F_2$. Tada je $(\mathcal{F}, \leqslant)$ usmjeren skup.*

Dokaz. $\leqslant$ je trivijalno refleksivna i tranzitivna. Neka su $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ proizvoljni. Tada je $F_3 = F_1 \cup F_2$ konačan podskup od J jer je konačna unija konačnih podskupova od J. Vrijedi $F_1 \subseteq F_3$ i $F_2 \subseteq F_3$ pa je $(\mathcal{F}, \leqslant)$ usmjeren skup. □

Definicija 2.1.3. *Neka je $(A, \leqslant)$ usmjeren skup. Svako preslikavanje $x : A \to X$ naziva se hiperniz u X i označavamo ga s $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.*
Za normiran prostor X kažemo da hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ konvergira ako $\exists x \in X$ takav da vrijedi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha_0 \in A), \quad \alpha_0 \leqslant \alpha \Longrightarrow \|x - x_\alpha\| < \epsilon.$$

Tada pišemo $x = \lim_{\alpha \in A} x_\alpha$.
Za normiran prostor X kažemo da je hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ Cauchyjev ako vrijedi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \alpha_0 \in A), \quad \alpha_0 \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \Longrightarrow \|x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}\| < \epsilon.$$

Propozicija 2.1.4. *Hiperniz u normiranom prostoru ima najviše jedan limes.*

Dokaz. [1, str. 47, Napomena 3.1.4. (a)] □

Propozicija 2.1.5. *Neka su X i Y normirani prostori i neka je $f : X \to Y$. Funkcija f je neprekidna u $x_0 \in X$ ako i samo ako za svaki hiperniz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ u X koji konvergira prema x_0 vrijedi $f(x_0) = \lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha)$.*

Dokaz. [1, str. 47, Napomena 3.1.4. (f)] □

Definicija 2.1.6. *Neka je $x : J \to X$ gdje je J proizvoljan beskonačan skup i X normiran prostor. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih konačnih podskupova od J. Tada je za $\leqslant$ kao u 2.1.2 $(\mathcal{F}, \leqslant)$ usmjeren skup. Kažemo da je familija $\{x_j = x(j) : j \in J\}$ sumabilna i da je njena suma $x_0 \in X$ ako je x_0 limes hiperniza $(s_F)_{F \in \mathcal{F}}$ gdje je $s_F = \sum_{j \in F} x_j$. Tada pišemo $x_0 = \sum_{j \in J} x_j$.*

Propozicija 2.1.7. *Neka je X Banachov prostor. Familija $\{x_j : j \in J\}$ u X je sumabilna ako i samo ako zadovoljava Cauchyjev kriterij:*

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists G(\epsilon) \in \mathcal{F}), \quad F \in \mathcal{F}, F \subseteq J \setminus G(\epsilon) \Longrightarrow \|\sum_{j \in F} x_j\| < \epsilon.$$

Dokaz. [1, str. 48, Propozicija 3.1.7.] □

2.2 Bezuvjetna konvergencija

Definicija 2.2.1. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Kažemo da red $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno u X ako za svaku permutaciju σ od $\mathbb{N}$ red $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$ konvergira.*

Teorem 2.2.2. *Neka je (c_n) niz u $\mathbb{F}$. Tada $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ konvergira apsolutno ako i samo ako konvergira bezuvjetno.*

Dokaz. [1, str. 51, Teorem 3.2.2.] □

Korolar 2.2.3. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Ako $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konvergira apsolutno onda konvergira i bezuvjetno.*

Dokaz. [1, str. 53, Korolar 3.2.3.] □

Teorem 2.2.4. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Tada je familija $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sumabilna ako i samo ako $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno.*

Dokaz. [1, str. 54, Teorem 3.2.6.] □

Korolar 2.2.5. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Ako $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno onda je $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ za svaku permutaciju σ od N.*

Dokaz. [1, str. 55, Korolar 3.2.7.] □

Definicija 2.2.6. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Za njega definiramo:*

$$\mathcal{R}_F = \sup\{\|\sum_{n\in\mathbb{F}} x_n\| : F \subseteq \mathbb{N} \text{ konačan}\},$$
$$\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \sup\{\|\sum_{n\in\mathbb{F}} \epsilon_n x_n\| : F \subseteq \mathbb{N} \text{ konačan i } \mathcal{E} = (\epsilon_n) \text{ s } \epsilon_n \in \{-1, +1\}\},$$
$$\mathcal{R}_{\Lambda} = \sup\{\|\sum_{n\in\mathbb{F}} \lambda_n x_n\| : F \subseteq \mathbb{N} \text{ konačan i } \Lambda = (\lambda_n) \text{ s } |\lambda_n| \leqslant 1\}.$$

Očito vrijedi $0 \leqslant \mathcal{R}_F \leqslant \mathcal{R}_{\mathcal{E}} \leqslant \mathcal{R}_{\Lambda} \leqslant +\infty$ jer je supremum skupa manji ili jednak supremumu njegovog nadskupa.

Teorem 2.2.7. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Tada vrijedi:*
(a) $\mathcal{R}_F \leqslant \mathcal{R}_{\mathcal{E}} \leqslant 2\mathcal{R}_F$,
(b) $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{R}_{\Lambda}$ ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,
(c) $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \leqslant \mathcal{R}_{\Lambda} \leqslant 2\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Ako tvrdnje vrijede onda iz njih slijedi da je svaki od $\mathcal{R}_F, \mathcal{R}_{\mathcal{E}}, \mathcal{R}_{\Lambda}$ konačan ako i samo ako su sva tri konačna.

Dokaz.
(a) $\mathcal{R}_F \leqslant \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ jer je supremum skupa manji ili jednak supremumu njegovog nadskupa. Neka je konačan $F \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan i niz (ϵ_n) proizvoljan takav da je $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka su $F^+ = \{n : \epsilon_n = 1\} \cap F$ i $F^- = \{n : \epsilon_n = -1\} \cap F$, tada su oba konačna jer su podskupovi od F, te očito vrijedi $F^+ \cap F^- = \emptyset$ i $F^+ \cup F^- = F$. Vrijedi:

$$\|\sum_{n\in\mathbb{F}} \epsilon_n x_n\| = \|\sum_{n\in\mathbb{F}^+} \epsilon_n x_n + \sum_{n\in\mathbb{F}^-} \epsilon_n x_n\| = \|\sum_{n\in\mathbb{F}^+} x_n - \sum_{n\in\mathbb{F}^-} x_n\| \leqslant \underbrace{\|\sum_{n\in\mathbb{F}^+} x_n\|}_{\leqslant\mathcal{R}_F} + \underbrace{\|\sum_{n\in\mathbb{F}^-} x_n\|}_{\leqslant\mathcal{R}_F} \leqslant 2\mathcal{R}_F.$$

Pa kada uzmemo supremum po skupu $\{F \subseteq \mathbb{N}$ konačan i $\mathcal{E} = (\epsilon_n)$ s $\epsilon_n \in \{-1, +1\}\}$ slijedi $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \leqslant 2\mathcal{R}_F$.
(b) Pretpostavimo da je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Neka je konačan $F \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan i $\Lambda = (\lambda_n)$ proizvoljan niz skalara takvih da je $|\lambda_n| \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Označimo $N = card(F)$. Prema 1.4.2 slijedi da postoje $c_k \geqslant 0$ i $\epsilon_{k,n} \in \{-1, +1\}$ za $k = 1, \ldots, N + 1$ i $n \in F$ takvi da vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{N+1} c_k = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{N+1} \epsilon_{k,n} c_k = \lambda_n, \quad \forall n \in F.$$

Tada slijedi:

$$\begin{aligned}\|\sum_{n\in F}\lambda_n x_n\| &= \|\sum_{n\in F}\sum_{k=1}^{N+1}\epsilon_{k,n}c_k x_n\| = [\text{konačne sume komutiraju}] = \|\sum_{k=1}^{N+1}c_k\sum_{n\in F}\epsilon_{k,n}x_n\| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{N+1}\|c_k\sum_{n\in F}\epsilon_{k,n}x_n\| = \sum_{k=1}^{N+1}|c_k|\|\sum_{n\in F}\epsilon_{k,n}x_n\| = \sum_{k=1}^{N+1}c_k\underbrace{\|\sum_{n\in F}\epsilon_{k,n}x_n\|}_{\leqslant\mathcal{R}_{\mathcal{E}}} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{N+1}c_k}_{=1}\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{R}_{\mathcal{E}}.\end{aligned}$$

Pa kada uzmemo supremum po skupu $\{F \subseteq \mathbb{N}$ konačan i $\Lambda = (\lambda_n)$ s $|\lambda_n| \leqslant 1\}$ slijedi $\mathcal{R}_\Lambda \leqslant \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Vrijedi i $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \leqslant \mathcal{R}_\Lambda$ jer je supremum skupa manji ili jednak supremumu njegovog nadskupa, pa konačno $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} = \mathcal{R}_\Lambda$.
(c) Pretpostavimo da je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Neka je konačan $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{N}$ proizvoljan i neka je $\Lambda = (\lambda_n)$ proizvoljan niz skalara takav da je $|\lambda_n| \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Definiramo $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ takve da je $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi $|\alpha_n| \leqslant 1$ i $|\beta_n| \leqslant 1$, $\forall n \in N$. Sada analogno kao u dokazu tvrdnje (b) slijedi:

$$\|\sum_{n\in F}\alpha_n x_n\| \leqslant \mathcal{R}_{\mathcal{E}} \quad \text{i} \quad \|\sum_{n\in F}\beta_n x_n\| \leqslant \mathcal{R}_{\mathcal{E}}.$$

Sada vrijedi:

$$\|\sum_{n\in F}\lambda_n x_n\| = \|\sum_{n\in F}(\alpha_n + i\beta_n)x_n\| = \|\sum_{n\in F}\alpha_n x_n + i\sum_{n\in F}\beta_n x_n\| \leqslant \underbrace{\|\sum_{n\in F}\alpha_n x_n\|}_{\leqslant\mathcal{R}_{\mathcal{E}}} + \underbrace{\|\sum_{n\in F}\beta_n x_n\|}_{\leqslant\mathcal{R}_{\mathcal{E}}} \leqslant 2\mathcal{R}_{\mathcal{E}}.$$

Pa kada uzmemo supremum po skupu $\{F \subseteq \mathbb{N}$ konačan i $\Lambda = (\lambda_n)$ s $|\lambda_n| \leqslant 1\}$ slijedi $\mathcal{R}_\Lambda \leqslant 2\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. Vrijedi i $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \leqslant \mathcal{R}_\Lambda$ jer je supremum skupa manji ili jednak supremumu njegovog nadskupa, pa konačno $\mathcal{R}_{\mathcal{E}} \leqslant \mathcal{R}_\Lambda \leqslant 2\mathcal{R}_{\mathcal{E}}$. □

Teorem 2.2.8. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Ako $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno onda su $\mathcal{R}_F, \mathcal{R}_{\mathcal{E}}$ i $\mathcal{R}_\Lambda$ konačni.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno. Prema 2.2.7 dovoljno je dokazati da je $\mathcal{R}_\Lambda$ konačan. Za svaki konačan $F \subseteq \mathbb{N}$ i svaki niz skalara $\Lambda = (\lambda_n)$ za koji vrijedi $|\lambda_n| \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, definiramo funkcional $T_{F,\Lambda} : X^* \to \mathbb{F}$ s:

$$T_{F,\Lambda}(f) = f(\sum_{n\in F}\lambda_n x_n), \quad \forall f \in X^*.$$

$T_{F,\Lambda}$ je očito linearan i vrijedi:

$$\|T_{F,\Lambda}\| = \sup_{\|f\|=1}|T_{F,\Lambda}(f)| = \sup_{\|f\|=1}|f(\sum_{n\in F}\lambda_n x_n)| \underset{1.2.2}{=} \|\sum_{n\in F}\lambda_n x_n\|.$$

Zato imamo:

$$\mathcal{R}_\Lambda \underset{\text{definicija}}{=} \sup_{F,\Lambda} \|\sum_{n\in F} \lambda_n x_n\| = \sup_{F,\Lambda} \|T_{F,\Lambda}\|.$$

Neka je sada $f \in X^*$ proizvoljan. Iz bezuvjetne konvergencije od $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ slijedi da za proizvoljnu σ permutaciju od N, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$ konvergira pa vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(x_{\sigma(n)}) = [\text{neprekidnost od } f] = f(\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\sigma(n)}}_{\in X}) \in \mathbb{F}.$$

Zbog proizvoljnosti od σ slijedi da $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x_n)$ konvergira bezuvjetno. Kako je $(f(x_n))$ niz skalara slijedi prema 2.2.2 slijedi da $\sum_{n=1}^{+\infty} f(x_n)$ konvergira i aspolutno, tj. $\sum_{n=1}^{+\infty}|f(x_n)| < +\infty$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}\sup_{F,\Lambda}|T_{F,\Lambda}(f)| &= \sup_{F,\Lambda}|f(\sum_{n\in F} \lambda_n x_n)| = \sup_{F,\Lambda}|\sum_{n\in F} \lambda_n f(x_n)| \leqslant \sup_{F,\Lambda} \sum_{n\in F}|\lambda_n f(x_n)| = \\ &= \sup_{F,\Lambda} \sum_{n\in F} \underbrace{|\lambda_n|}_{\leqslant 1} |f(x_n)| \leqslant \sup_{F,\Lambda} \underbrace{\sum_{n\in F}|f(x_n)|}_{\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|f(x_n)|} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|f(x_n)| < +\infty.\end{aligned}$$

Zbog proizvljnosti of $f \in X^*$ po principu uniformne ograničenosti 1.1.2 sada slijedi $R_\Lambda = \sup_{F,\Lambda}\|T_{F,\Lambda}\| < +\infty$. □

Teorem 2.2.9. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ konvergira bezuvjetno.
(b) Familija $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je sumabilna.
(c) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$F \subseteq \mathbb{N} \text{ konačan}, \ \min F > N \quad \Longrightarrow \quad \|\sum_{n\in F} x_n\| < \epsilon.$$

(d) $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{n_k}$ konvergira za svaki rastući niz prirodnih brojeva $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
(e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n x_n$ konvergira za svaki niz skalara (ϵ_n) takav da je $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
(f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n$ konvergira za svaki ograničen niz skalara (λ_n).
(g) Vrijedi:

$$\lim_{N\to+\infty} \sup\{\sum_{n=N}^{+\infty}|f(x_n)| : f \in X^*, \|f\| \leqslant 1\} = 0.$$

Dokaz.

$\boxed{\text{(a)}\Leftrightarrow\text{(b)}\Leftrightarrow\text{(c)}}$

Slijedi iz 2.2.4 i 2.1.7.

$\boxed{\text{(c)}\Rightarrow\text{(g)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Neka je $\epsilon > 0$ i neka je $N \in \mathbb{N}$ koji za ϵ postoji prema (c). Neka su $L, K \in \mathbb{N}$ proizvoljni takvi da vrijedi $L \geqslant K > N$ i neka je $f \in X^*$ proizvoljan takav da je $\|f\| \leqslant 1$. Sada definiramo sljedeće skupove:

$$F^+ = \{n \in \mathbb{N} : K \leqslant n \leqslant L, \mathrm{Re}(f(x_n)) \geqslant 0\},$$
$$F^- = \{n \in \mathbb{N} : K \leqslant n \leqslant L, \mathrm{Re}(f(x_n)) < 0\}.$$

Vrijedi $F^+ \cap F^- = \emptyset$ i $F^+ \cup F^- = \{K, \ldots, L\}$. Vrijedi $\min(F^+) \geqslant K > N$ i slijedi:

$$\sum_{n\in F^+} \underbrace{|\mathrm{Re}(f(x_n))|}_{\geqslant 0} = \sum_{n\in F^+} \mathrm{Re}(f(x_n)) = \mathrm{Re}(\sum_{n\in F^+} f(x_n)) = \mathrm{Re}(f(\sum_{n\in F^+} x_n)) \leqslant |f(\sum_{n\in F^+} x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\|f\|}_{\leqslant 1} \underbrace{\|\sum_{n\in F^+} x_n\|}_{\leqslant \epsilon,\text{ prema (c)}} < \epsilon.$$

Analogno se za F^- dobije $\sum_{n\in F^-} |\mathrm{Re}(f(x_n))| < \epsilon$, pa je zajedno:

$$\sum_{n=K}^{L} |\mathrm{Re}(f(x_n))| = \underbrace{\sum_{n\in F^+} |\mathrm{Re}(f(x_n))|}_{<\epsilon} + \underbrace{\sum_{n\in F^-} |\mathrm{Re}(f(x_n))|}_{<\epsilon} < 2\epsilon.$$

A analogno promatrajući imaginarne dijelove se dobije $\sum_{n=K}^{L} |\mathrm{Im}(f(x_n))| < 2\epsilon$, pa slijedi:

$$\sum_{n=K}^{L} |f(x_n)| = \sum_{n=K}^{L} |\mathrm{Re}(f(x_n)) + \mathrm{Im}(f(x_n))| \leqslant \sum_{n=K}^{L} (|\mathrm{Re}(f(x_n))| + |\mathrm{Im}(f(x_n))|) =$$
$$= \underbrace{\sum_{n=K}^{L} |\mathrm{Re}(f(x_n))|}_{<2\epsilon} + \underbrace{\sum_{n=K}^{L} |\mathrm{Im}(f(x_n))|}_{<2\epsilon} < 4\epsilon.$$

Zbog proizvoljnosti od $f \in X^*$ takvog da $\|f\| \leqslant 1$ slijedi:

$$\sup\{\sum_{n=K}^{L} |f(x_n)| : f \in X^*, \|f\| \leqslant 1\} \leqslant 4\epsilon.$$

Kako to vrijedi za sve $K, L > N$ možemo uzeti prvo $L \to +\infty$ pa onda i $K \to +\infty$ pa se dobije:

$$\lim_{K\to+\infty} \sup\{\sum_{n=K}^{+\infty} |f(x_n)| : f \in X^*, \|f\| \leqslant 1\} \leqslant 4\epsilon.$$

Zbog proizvoljnosti od $\epsilon > 0$ sada je konačno:

$$\lim_{K\to+\infty} \sup\{\sum_{n=K}^{+\infty} |f(x_n)| : f \in X^*, \|f\| \leqslant 1\} = 0.$$

$\boxed{\text{(g)}\Rightarrow\text{(f)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (g). Neka je (λ_n) proizvoljan niz skalara za koji vrijedi $|\lambda_n| \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan, tada prema (g), $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

$$\forall N \geqslant N_0, \quad \sup\{\sum_{n=K}^{+\infty} |f(x_n)| : f \in X^*, \|f\| \leqslant 1\} < \epsilon.$$

Neka su $M, N \in \mathbb{N}$ proizvoljni takvi da je $N > M \geqslant N_0$. Prema korolaru Hahn-Banachovog teorema 1.2.2, $\exists f \in X^*$ takav da je $\|f\| = 1$ i:

$$\|\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n\| = f(\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n).$$

Sada slijedi:

$$\|\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n\| = f(\sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n x_n) = \sum_{n=M+1}^{N} \lambda_n f(x_n) \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} \underbrace{|\lambda_n|}_{\leqslant 1} |f(x_n)| \leqslant \sum_{n=M+1}^{N} |f(x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=M+1}^{+\infty} |f(x_n)| < \epsilon.$$

Zbog proizvoljnosti od $M, N \geqslant N_0$, $\sum_{n=1}^{N} \lambda_n x_n$ je Cauchyjev pa je i konvergentan.

$\boxed{\text{(f)}\Rightarrow\text{(e)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (f). Trivijalno slijedi (e).

$\boxed{\text{(e)}\Rightarrow\text{(d)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (e). Neka je $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ proizvoljan rastući niz prirodnih brojeva. Neka je $e_n = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i neka je $f_n = 1$ ako je $n = n_k$ za neki $k \in \mathbb{N}$ i neka je $f_n = -1$ ako je $n \neq n_k$ za sve $k \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=1}^{+\infty} e_n x_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x_n$ konvergiraju prema (e) pa konvergira i $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{n_k} = \frac{1}{2}(\sum_{n=1}^{+\infty} e_n x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n x_n)$.

$\boxed{\text{(d)}\Rightarrow\text{(c)}}$
Pretpostavimo da ne vrijedi tvrdnja (c). Tada $\exists\epsilon > 0$ takav da za $\forall N \in \mathbb{N}$ postoji konačan $F_N \subseteq \mathbb{N}$ takav da je $\min(F_N) > N$ i $\|\sum_{n\in F_N} x_n\| \geqslant \epsilon$. Neka je sada $G_1 = F_1$ i $N_1 = \max(G_1)$, $G_2 = F_{N_1}$ i $N_2 = \max(G_2)$ i tako dalje $G_K = F_{N_{K-1}}$ i $N_K = \max(G_K)$, $\forall K \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Sada za niz konačnih skupova (G_K), $\forall K \in N$ vrijedi:

$$\max(G_K) < \min(G_{K+1}) \quad \text{i} \quad \|\sum_{n\in G_K} x_n\| \geqslant \epsilon. \tag{2.1}$$

Neka je $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rastući niz svih elemenata od $\underset{K\in\mathbb{N}}{\cup} G_K$. Pretpostavimo da je $\sum_{k=1}^{n} x_{n_k}$ Cauchyjev. Tada postoji takav $N_0 \in \mathbb{N}$ da za sve $N > M \geqslant N_0$ vrijedi $\|\sum_{k=M+1}^{N} x_{n_k}\| < \epsilon$. Postoji $K \in \mathbb{N}$ takav da je $N_0 \in G_K$ pa je tada $\|\sum_{n_k\in G_{K+1}} x_{n_k}\| < \epsilon$ što je u kontradikciji s (2.1). Dakle $\sum_{k=1}^{n} x_{n_k}$ nije Cauchyjev pa $\sum_{k=1}^{+\infty} x_{n_k}$ ne konvergira što znači da tvrdnja (c) ne vrijedi. Sada po kontrapoziciji (c) povlači (d). $\square$

Poglavlje 3

Topološke baze

3.1 Osnovne definicije i svojstva

Definicija 3.1.1. *Niz (x_n) u Banachovom prostoru X je topološka baza za X ako $\forall x \in X$ postoji jedinstven niz skalara $(a_n(x))$ takav da vrijedi:*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) x_n. \tag{3.1}$$

Napomena 3.1.2. *Zbog jedinstvenosti od $(a_n(x))$ slijedi da $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, jer ako $\exists n \in N$ takav da je $x_n = 0$ onda bi $a_n(x)$ mogao poprimiti bilo koju vrijednost u $\mathbb{F}$ pa $(a_n(x))$ ne bi bio jedinstven.*

Propozicija 3.1.3. *Niz (a_n) definiran s* (3.1) *je niz linearnih funkcionala na X.*

Dokaz. Za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ te proizvoljne $x, y \in X$ vrijedi po (3.1) vrijedi:

$$\alpha x + \beta y = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\alpha x + \beta y) x_n$$

te

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) x_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y) x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha a_n(x) + \beta a_n(y)) x_n$$

pa zbog jedinstvenosti zapisa (3.1) primjenjenog na $\alpha x + \beta y$ slijedi:

$$a_n(\alpha x + \beta y) = (\alpha a_n(x) + \beta a_n(y)).$$

□

Definicija 3.1.4. *Neka je (x_n) topološka baza Banachovog prostora X. Tada niz linearnih funkcionala (a_n) definiran s* (3.1) *nazivamo pridruženi niz koeficijentnih funkcionala od (x_n).*

Definicija 3.1.5. *Ortonormiran niz (e_n) u Hilbertovom prostoru H je ortonormirana baza za H ako $\forall x \in H$ postoji niz skalara $(c_n(x))$ takav da vrijedi:*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(x) e_n.$$

Tada pomoću skalarnog produkta slijedi $c_n(x) = \langle x, e_n \rangle$, $\forall n \in N$, pa je niz $(c_n(x))$ jedinstveno određen te je stoga (e_n) također i topološka baza za H.

Definicija 3.1.6. *Neka je X Banachov prostor i neka su dani nizovi $(x_n) \subseteq X$ i $(a_n) \subseteq X^*$. Kažemo da je (a_n) biortogonalan s (x_n) ako vrijedi $a_m(x_n) = \delta_{mn}$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$.*

Definicija 3.1.7. *Neka je (x_n) topološka baza Banachovog prostora X i (a_n) niz njenih pridruženih koeficijentnih funkcionala. Sada, $\forall N \in \mathbb{N}$ definiramo preslikavanje $S_N : X \to X$ s:*

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n, \quad \forall x \in X. \tag{3.2}$$

Ta preslikavanja nazivamo operatori parcijalne sume. Operatori parcijalne sume su linearni funkcionali jer su a_n linearni funkcionali $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.2 Neprekidnost koeficijentnih funkcionala

Definicija 3.2.1. *Neka je (x_n) topološka baza Banachovog prostora X i (a_n) njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Kažemo da je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Schauderova baza za X ako je a_n neprekidan $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Primjer 3.2.2. *Neka je (e_n) ortonormirana baza Hilbertovog prostora H. Tada za njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala (a_n) vrijedi $a_n(x) = \langle x, e_n \rangle$ pa su svi a_n neprekidni.*

Lema 3.2.3. *Operatori parcijalne sume iz* (3.2) *S_N su neprekidni $\forall N \in \mathbb{N}$ ako i samo ako su a_n neprekidni $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Pretpostavimo da su a_n neprekidni $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada iz (3.2) slijedi neprekidnost od S_N, $\forall N \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\Rightarrow}$
Pretpostavimo da su S_N neprekidni $\forall N \in \mathbb{N}$. Vrijedi:

$$a_1(x)x_1 = S_1(x),$$

a za $n \geqslant 2$ vrijedi:

$$a_n(x)x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x)x_i = S_n(x) - S_{n-1}(x) = (S_n - S_{n-1})(x) \tag{3.3}$$

pa zbog neprekidnosti od S_N, $\forall N \in \mathbb{N}$, slijedi da su preslikavanja $x \mapsto a_n(x)x_n$ neprekidna $\forall n \in \mathbb{N}$.
Za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$ definiramo preslikavanje $span\{x_n\} \to \mathbb{F}$ s $\alpha x_n \mapsto \alpha$. Za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ vrijedi:

$$|\alpha - \beta| = \frac{1}{||x_n||}||x_n|||\alpha - \beta| = \frac{1}{||x_n||}||\alpha x_n - \beta x_n|| \leqslant \frac{1}{||x_n||}||\alpha x_n - \beta x_n||$$

pa je $\alpha x_n \to \alpha$ neprekidno. Koristili smo da $x_n \neq 0$ prema 3.1.2 pa zato $\frac{1}{||x_n||}$ postoji.
Kompozicija neprekidnih preslikavanja $x \mapsto a_n(x)x_n$ i $\alpha x_n \mapsto \alpha$ je preslikavanje $x \mapsto a_n(x)$ koje je zbog toga neprekidno. □

Teorem 3.2.4. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X za koji vrijedi da $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka je*

$$Y = \left\{ (a_n) \subseteq \mathbb{F} : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n \textit{ konvergira u } X \right\}$$

i neka je $||\cdot||_Y : Y \to \mathbb{R}$ definirano s:

$$||(a_n)||_Y = \sup_{N \in \mathbb{N}} ||\sum_{n=1}^{N} a_n x_n||, \quad \forall (a_n) \in Y.$$

Tada vrijedi:
(a) Y je Banachov prostor uz normu $||\cdot||_Y$.
(b) Ako je (x_n) topološka baza za X, onda je preslikavanje T definirano s $(a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n$ izomorfizam između Y i X.

Dokaz. (a) Y je podskup vektorskog prostora $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ pa je zbog linearnosti limesa i sam vektorski prostor. Za $(a_n) \in Y$ $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n$ konvergira pa jer su konvergentni

nizovi ograničeni slijedi $\|a_n\|_Y < +\infty$. Dakle, $\|\cdot\|_Y$ je dobro definirano.
Za $\alpha \in \mathbb{F}$ i $(a_n), (b_n) \in Y$ vrijedi:

$$\|\alpha(a_n)\|_Y = \|(\alpha a_n)\|_Y = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{N} \alpha a_n x_n\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\alpha \sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} |\alpha| \|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| =$$
$$= |\alpha| \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| = |\alpha| \|(a_n)\|_Y$$

i

$$\|(a_n)+(b_n)\|_Y = \|(a_n + b_n)\|_Y = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{N}(a_n + b_n)x_n\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n + \sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \left(\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| + \|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \right) =$$
$$= [\text{supremumi jednakih skupova}] = \sup_{(N,N)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \left(\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| + \|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \right) \leqslant$$
$$\leqslant [\text{supremum skupa je manji ili jednak od supremuma njegovog nadskupa}] \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(M,N)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \left(\|\sum_{m=1}^{M} a_m x_m\| + \|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \right) = \sup_{M\in\mathbb{N}} \|\sum_{m=1}^{M} a_m x_m\| + \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| =$$
$$= \|(a_n)\|_Y + \|(b_n)\|_Y.$$

Nadalje, ako je $\|(a_n)\|_Y = 0$ onda je $\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| = 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Dakle za $N = 1$ je tada $\|a_1 x_1\| = 0$, tj. $|a_1|\|x_1\| = 0$ pa jer $x_1 \neq 0$ slijedi $a_1 = 0$. Pretpostavimo da za neki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi da $\forall n \leqslant N$ vrijedi $a_n = 0$. Tada iz $\|\sum_{n=1}^{N+1} a_n x_n\| = 0$ slijedi $\|a_{N+1} x_{N+1}\| = 0$ pa zbog $x_{N+1} \neq 0$ slijedi $a_{N+1} = 0$. Sada po principu matematičke indukcije slijedi da je $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. $(a_n) = 0$.
Dakle, $\|\cdot\|_Y$ je norma na Y.
Preostaje pokazati da je Y potpun s obzirom na nju. Neka je (A_N) Cauchyjev niz u Y i $A_N = (a_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Za proizvoljne $M, N \in \mathbb{N}$ i fiksni $n \geqslant 2$ vrijedi:

$$|a_1^M - a_1^N|\|x_1\| = \|(a_1^M - a_1^N)x_1\| \leqslant [\text{po definiciji od } \|\cdot\|_Y] \leqslant \|A_M - A_N\|_Y \leqslant 2\|A_M - A_N\|_Y$$

i

$$|a_n^M - a_n^N| \|x_n\| = \|(a_n^M - a_n^N)x_n\| = \|\sum_{i=1}^{n}(a_i^M - a_i^N)x_i - \sum_{i=1}^{n-1}(a_i^M - a_i^N)x_i\| \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\|\sum_{i=1}^{n}(a_i^M - a_i^N)x_i\|}_{\leqslant \|A_M - A_N\|_Y \text{ po definiciji}} + \underbrace{\|\sum_{i=1}^{n-1}(a_i^M - a_i^N)x_i\|}_{\leqslant \|A_M - A_N\|_Y \text{ po definiciji}} \leqslant 2\|A_M - A_N\|_Y.$$

Dakle, za proizvoljne $M, N \in \mathbb{N}$ i fiksni $n \in \mathbb{N}$ koristeći još da je $x_n \neq 0$ dobije se:

$$|a_n^M - a_n^N| \leqslant \frac{2}{\|x_n\|}\|A_M - A_N\|_Y.$$

Sada zato što je (A_N) Cauchyjev slijedi da je i $(a_n^N)_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev $\forall n \in \mathbb{N}$. Zbog potpunosti od $\mathbb{F}$ slijedi da $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in \mathbb{F}$ tako da $\lim_{N\to+\infty} a_n^N = a_n$.
Neka je $\epsilon > 0$. (A_N) je Cauchyjev pa zato postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi:

$$\forall M, N \geqslant N_0, \quad \|A_M - A_N\|_Y = \sup_{L\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{L}(a_n^M - a_n^N)x_n\| < \epsilon.$$

Za fiksni $L \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $M, N \in \mathbb{N}$ definiramo:

$$y_{M,N} = \sum_{n=1}^{L}(a_n^M - a_n^N)x_n \quad \text{i} \quad y_N = \sum_{n=1}^{L}(a_n - a_n^N)x_n.$$

Vrijedi:

$$\lim_{M\to+\infty} y_{M,N} = \lim_{M\to+\infty} \sum_{n=1}^{L}(a_n^M - a_n^N)x_n = [\text{limes i konačna suma komutiraju}] =$$
$$= \sum_{n=1}^{L} \lim_{M\to+\infty}(a_n^M - a_n^N)x_n = \sum_{n=1}^{L}(a_n - a_n^N)x_n = y_N.$$

Dakle, $\lim_{M\to+\infty} y_{M,N} = y_N$. Uz to također za $M, N \geqslant N_0$ vrijedi $\|y_{M,N}\| \leqslant \|A_M - A_N\|_Y < \epsilon$, pa zajedno slijedi da $\forall N \geqslant N_0$ vrijedi:

$$\|y_N\| = \|\lim_{M\to+\infty} y_{M,N}\| = \lim_{M\to+\infty} \|y_{M,N}\| \leqslant \epsilon.$$

Dobili smo nejednakost $\|y_N\| \leqslant \epsilon$, $\forall N \geqslant N_0$, tj. $\|\sum_{n=1}^{L}(a_n - a_n^N)x_n\| \leqslant \epsilon$, $\forall N \geqslant N_0$. Kako N_0 i ϵ ne ovise o L, možemo uzeti supremum po L pa dobijemo:

$$\sup_{L\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{L}(a_n - a_n^N)x_n\| \leqslant \epsilon, \quad \forall N \geqslant N_0. \tag{3.4}$$

Zato što je $A_{N_0} = (a_n^{N_0})_{n\in\mathbb{N}} \in Y$, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n^{N_0}x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{N_0}x_n$ konvergira. Svaki konvergentan niz je Cauchyjev pa $\exists M_0 \in \mathbb{N}$ tako da $\forall M, N \in \mathbb{N}$ takve da $N > M \geqslant M_0$ vrijedi:

$$\|\sum_{n=M+1}^{N} a_n^{N_0}x_n\| = \|\sum_{n=1}^{N} a_n^{N_0}x_n - \sum_{n=1}^{M} a_n^{N_0}x_n\| < \epsilon. \tag{3.5}$$

Sada ako je $N > M \geqslant max\{M_0, N_0\}$ onda:

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=1}^{N} a_nx_n - \sum_{n=1}^{M} a_nx_n\| &= \|\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_n^{N_0})x_n - \sum_{n=1}^{M}(a_n - a_n^{N_0})x_n + \sum_{n=M+1}^{N} a_n^{N_0}x_n\| \leqslant \\ &\leqslant \underbrace{\|\sum_{n=1}^{N}(a_n - a_n^{N_0})x_n\|}_{\leqslant\epsilon \text{ prema (3.4)}} + \underbrace{\|\sum_{n=1}^{M}(a_n - a_n^{N_0})x_n\|}_{\leqslant\epsilon \text{ prema (3.4)}} + \underbrace{\|\sum_{n=M+1}^{N} a_n^{N_0}x_n\|}_{<\epsilon \text{ prema (3.5)}} < \\ &< \epsilon + \epsilon + \epsilon = 3\epsilon.\end{aligned}$$

Dakle, niz parcijalnih suma $(\sum_{n=1}^{N} a_nx_n)_{N\in\mathbb{N}}$ je Cauchyjev u X, a X je potpun pa slijedi da $\sum_{n=1}^{+\infty} a_nx_n$ konvergira u X. Stoga je $(a_n) \in Y$ po definiciji od Y. Iz (3.4) još slijedi:

$$\|A_N - (a_n)\|_Y = \|(a_n) - A_N\|_Y = sup_{L\in\mathbb{N}}\|\sum_{n=1}^{L}(a_n - a_n^{N})x_n\| \leqslant \epsilon, \quad \forall N \geqslant N_0$$

pa je $\lim_{N\to+\infty} A_N = (a_n) \in Y$ što pokazuje da je Y potpun.

(b) Pretpostavimo da je (x_n) topološka baza za X. Uvjet teorema da je $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ zadovoljen je prema 3.1.2. Vrijedi $T((a_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_nx_n$, $\forall (a_n) \in Y$. Slika od T je u X po definiciji od Y pa je $T : Y \to X$. Za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i proizvoljne $(a_n), (b_n) \in Y$ vrijedi:

$$\begin{aligned}T(\alpha(a_n) + \beta(b_n)) &= T((\alpha a_n + \beta b_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)x_n = \alpha\sum_{n=1}^{+\infty} a_nx_n + \beta\sum_{n=1}^{+\infty} b_nx_n = \\ &= \alpha T((a_n)) + \beta T((b_n))\end{aligned}$$

pa je T linearno. Za $x \in X$ proizvoljan postoji prema 3.1.1 niz $(a_n(x))$ u $\mathbb{F}$ takav da je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n = x$ pa je stoga $(a_n(x)) \in Y$ jer prethodni red konvergira. A sada $T((a_n(x))) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n = x$ pa je T surjektivno. Ako za neke $(a_n), (b_n) \in Y$ vrijedi $T((a_n)) = T((b_n))$ tada za $\sum_{n=1}^{+\infty} a_nx_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_nx_n$ pa kako su ti redovi elementi od X prema jedinstvenosti iz 3.1.1 slijedi $(a_n) = (b_n)$ pa je T injektivno. Dakle, T je bijektivan linearni operator.

Za $(a_n) \in Y$ vrijedi:

$$\|T((a_n))\| = \|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n\| = \|\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| = [\text{neprekidnost norme}] = \lim_{N\to+\infty} \|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n\| = \|(a_n)\|_Y$$

pa je T ograničen linearni operator. T stoga zadovoljava uvjete Teorema o inverznom preslikavanju 1.1.3 pa je T izomorfizam. □

Korolar 3.2.5. *Neka je (x_n) topološka baza Banachovog prostora X, (a_n) njeni pripadni niz koeficijentnih funkcionala i S_N njeni operatori parcijalne sume. Neka su Y, $\|\cdot\|_Y$ i T definirani kao u 3.2.4 i označimo $C = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\|$. Tada vrijedi:*
(a) $C \leqslant \|T^{-1}\| < +\infty$, tj. S_N je neprekidan $\forall N \in \mathbb{N}$,
(b) $\|x\|_2 = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N x\|$ definira normu na X za koju vrijedi $\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_2 \leqslant C\|\cdot\|$, tj. ona je ekvivalentna početnoj i vrijedi $C \geqslant 1$,
(c) a_n je neprekidan i $1 \leqslant \|a_n\|\|x_n\| \leqslant 2C$, $\forall n \in \mathbb{N}$ te su (x_n) i (a_n) biortogonalni,
(d) (x_n) je Schauderova baza za X.

Dokaz. (a) Neka je $x \in X$, tada je $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) x_n$. T^{-1} postoji i ograničen je prema 3.2.4 pa zbog jedinstvenosti iz 3.1.1 vrijedi $T^{-1}x = (a_n(x))$. Slijedi za $N \in N$ proizvoljan:

$$\|S_N x\| \leqslant \sup_{M\in\mathbb{N}} \|S_M x\| = \sup_{M\in\mathbb{N}} \|\sum_{n=1}^{M} a_n(x) x_n\| = \|(a_n(x)\|_Y = \|T^{-1}x\|_Y \leqslant \|T^{-1}\|\|x\|.$$

Dakle, vrijedi $\|S_N\| \leqslant \|T^{-1}\| < +\infty$ pa je S_N ograničen i zbog proizvoljnosti od $N \in \mathbb{N}$ slijedi $C = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| \leqslant \|T^{-1}\| < +\infty$.
(b) Za $x \in X$ proizvoljan vrijedi:

$$\|x\|_2 = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N x\| \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\|\|x\| \leqslant C\|x\| < +\infty$$

pa je $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ dobro definirano. Za $\alpha \in \mathbb{F}$, $x, y \in X$ vrijedi:

$$\|\alpha x\|_2 = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N(\alpha x)\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|\alpha S_N x\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} |\alpha|\|S_N x\| = |\alpha| \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N x\| = |\alpha|\|x\|_2$$

te

$$\|x + y\|_2 = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N(x + y)\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N x + S_N y\| \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} (\|S_N x\| + \|S_N y\|) =$$
$$= \sup_{(N,N)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (\|S_N x\| + \|S_N y\|) \leqslant$$
$$\leqslant [\text{supremum skupa manji je ili jednak supremumu njegovog nadskupa}] \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{(M,N)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (\|S_M x\| + \|S_N y\|) = \sup_{M\in\mathbb{N}} \|S_M x\| + \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N y\| = \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

Nadalje, za $x \in X$ vrijedi:

$$\|x\|_2 = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N x\| \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| \|x\| = C\|x\|$$

i

$$\|x\| = \|\lim_{N\to+\infty} S_N x\| = \lim_{N\to+\infty} \|S_N x\| \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N x\| = \|x\|_2.$$

Sada ako je $\|x\|_2 = 0$ iz prethodne nejednakosti slijedi da je $\|x\| = 0$ pa je $x = 0$. Stoga je $\|\cdot\|_2$ norma na X, a iz prethodne dvije nejednakosti slijedi i da je ekvivalentna s $\|\cdot\|$. Iz prethodne dvije nejednakosti slijedi i $C \geqslant 1$.
(c) Neprekidnost od a_n, $\forall n \in \mathbb{N}$ slijedi iz (b) i 3.2.3. Za $x \in X$ proizvoljan i $n \geqslant 2$ vrijedi:

$$|a_n(x)|\|x_n\| = \|a_n(x)x_n\| \underset{(3.3)}{=} \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \leqslant \underbrace{\|S_n(x)\|}_{\leqslant C\|x\|} + \underbrace{\|S_{n-1}(x)\|}_{\leqslant C\|x\|} \leqslant 2C\|x\|$$

Također vrijedi:

$$|a_1(x)|\|x_1\| = \|a_1(x)x_1\| = \|S_1 x\| \leqslant C\|x\| \leqslant 2C\|x\|$$

pa jer prema 3.1.2 $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, slijedi:

$$|a_n(x)| \leqslant \frac{2C}{\|x_n\|}\|x\|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

To povlači da $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\|a_n\| \leqslant \frac{2C}{\|x_n\|}$, tj. $\|a_n\|\|x_n\| \leqslant 2C$.
Za $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan vrijedi $x_n = 1x_n$ pa zbog jedinstvenosti iz 3.1.1 slijedi da su (x_n) i (a_n) biortogonalni te je $a_n(x_n) = 1$, a iz toga slijedi $1 = |1| = |a_n(x_n)| \leqslant \|a_n\|\|x_n\|$. Dakle, dobili smo da vrijedi:

$$1 \leqslant \|a_n\|\|x_n\| \leqslant 2C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(d) (x_n) je Schauderova baza jer je prema (c) a_n neprekidan, $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Napomena 3.2.6. *Prethodni korolar pokazuje da je svaka topološka baza Banachovog prostora nužno Schauderova.*

Definicija 3.2.7. *Neka je (x_n) topološka baza Banachovog prostora X. Tada $C = \sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|$ nazivamo bazna konstanta. Prema 3.2.5 vrijedi $1 \leqslant C < +\infty$. Ako je $C = 1$, onda se (x_n) naziva monotona baza.*

Napomena 3.2.8. *Bazna konstanta nije nužno neovisna o izboru norme, odabir neke druge ekvivalentne norme može promijeniti baznu konstantu.*

Teorem 3.2.9. *Svaka topološka baza (x_n) Banachovog prostora (X) je monotona s obzirom na ekvivalentnu normu $\|\cdot\|_2 = \sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\cdot\|$ (tj. monotona je u Banachovom prostoru $(X,\|\cdot\|_2)$.)*

Dokaz. Prema 3.2.5, $\|\cdot\|_2$ je norma koja je ekvivalentna početnoj. Neka su $x \in X$ te $M, N \in \mathbb{N}$ proizvoljni, tada:

$$
\begin{aligned}
S_M S_N x &= S_M\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n(x)x_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} S_M(a_n(x)x_n) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_m((a_n(x)x_n))x_n = \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n(x)a_m(x_n)x_n = [\text{po 3.2.5 } (x_n) \text{ i } (a_n) \text{ su biortogonalni}] = \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} a_n\delta_{m,n}x_n = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\sum_{m=1}^{M}\delta_{m,n}}_{=1,\text{ ako } n\leqslant M,\text{ inače } =0} a_n x_n = \sum_{n=1}^{min\{M,N\}} a_n x_n = S_{min\{M,N\}}(x).
\end{aligned}
$$

Zato je za $x \in X$ i $N \in \mathbb{N}$ proizvoljne:

$$
\begin{aligned}
\|S_N x\|_2 &\leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N x\|_2 = \sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{M\in\mathbb{N}}\|S_M S_N x\| = \sup_{N\in\mathbb{N}}\sup_{M\in\mathbb{N}}\|S_{min\{M,N\}}x\| = \sup_{(M,N)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\|S_{min\{M,N\}}x\| = \\
&= \sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N x\| = \|x\|_2.
\end{aligned}
$$

To povlači da je $\|S_N\|_2 \leqslant 1$ pa zbog proizvoljnosti od $N \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|_2 \leqslant 1$. A posljednje znači da za baznu konstantu baze (x_n) u $(X, \|\cdot\|_2)$ vrijedi $C = \sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|_2 \leqslant 1$. Prema 3.2.7 je $C \geqslant 1$ pa slijedi $C = 1$, tj. (x_n) je monotona s obzirom na $\|\cdot\|_2$. □

Primjer 3.2.10. *Ne postoji u svakom Banachovom prostoru (promatranom uz fiksnu normu) monotona baza. Štoviše, postoji Banachov prostor X takav da (s obzirom na fisknu normu) vrijedi* $\inf\{C_B$ *bazna konstanta od B:B topološka baza za X*$\} > 1$.

Dokaz. [4] □

3.3 Ekvivalentne topološke baze

Propozicija 3.3.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori, (x_n) topološka baza za X i (a_n) njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala te $T : X \to Y$ izomorfizam. Tada je (Tx_n) topološka baza za Y i (a_nT^{-1}) je njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala.*

Dokaz. Neka je $y \in Y$ proizvoljan. T je izomorfizam pa postoji izomorfizam T^{-1}. Vrijedi $T^{-1}y \in X$ pa je $T^{-1}y = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(T^{-1}y)x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(T^{-1}y)x_n$. Sada:

$$y = TT^{-1}y = T(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(T^{-1}y)x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} T(a_n(T^{-1}y)x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(T^{-1}y)Tx_n.$$

Neka je (b_n) niz skalara takav da $y = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n Tx_n$. Tada vrijedi:

$$T^{-1}y = T^{-1}(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n Tx_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n T^{-1}Tx_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x_n.$$

Sada zbog jedinstvenosti od $a_n(T^{-1}y)$ u zapisu od $T^{-1}y$ preko topološke baze (x_n) slijedi $b_n = a_n(T^{-1}y)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dakle (b_n) je jedinstven pa zbog proizvoljnosti od $y \in Y$ slijedi da je (Tx_n) topološka baza za Y i (a_nT^{-1}) je njen pripadni niz koeficijentnih funkcionala. □

Definicija 3.3.2. *Neka su X i Y Banachovi prostori. Kažemo da je topološka baza (x_n) za X je ekvivalentna topološkoj bazi (y_n) za Y ako postoji izomorfizam $T : X \to Y$ takav da vrijedi $Tx_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Napomena 3.3.3. *Ako je $X = Y$ onda ekvivalentnost topoloških baza (x_n) i (y_n) označavamo s $(x_n) \sim (y_n)$. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na skupu svih topoloških baza Banachovog prostora X. Refleksivnost slijedi pomoću identitete, simetričnost pomoću inverza, a tranzitivnost pomoću kompozicije.*

Teorem 3.3.4. *Neka su X i Y Banachovi prostori te (x_n) i (y_n) redom njihove topološke baze. Tada su sljedeće dvije tvrdnje ekvivalentne:*
(a) (x_n) je ekvivalentna (y_n),
(b) Za svaki niz skalara (c_n), $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n$ konvergira ako i samo ako $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n y_n$ konvergira.

Dokaz.
$\boxed{(a) \Rightarrow (b)}$
Pretpostavimo da je (x_n) ekvivalentna (y_n). Tada postoji izomorfizam $T : X \to Y$ takav da je $Tx_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dovoljno je pokazati jedan smjer od (b) jer će drugi onda slijediti analogno. Neka je (c_n) neki niz skalara takav da $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n$ konvergira. Tada je $(\sum_{n=1}^{N} c_n x_n)_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan, pa za njega postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\forall m, n \geqslant N_0$ vrijedi $\|\sum_{k=m+1}^{n} c_n x_n\| < \epsilon$. Tada za $\forall m, n \geqslant N_0$ vrijedi i:

$$\|\sum_{k=m+1}^{n} c_n y_n\| = \|\sum_{k=m+1}^{n} c_n Tx_n\| = \|T(\sum_{k=m+1}^{n} c_n x_n)\| \leqslant \|T\|\|\sum_{k=m+1}^{n} c_n x_n\| < \|T\|\epsilon,$$

a to znači da je $(\sum_{n=1}^{N} c_n y_n)_{N\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev, a kako je Y Banachov onda je $(\sum_{n=1}^{N} c_n y_n)_{N\in\mathbb{N}}$ i konvergentan, tj. $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n y_n$ konvergira.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$

Pretpostavimo da za svaki niz skalara (c_n), $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n$ konvergira ako i samo ako $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n y_n$ konvergira. Neka su (a_n) i (b_n) redom nizovi koeficijentnih funkcionala za (x_n) i (y_n). Neka je $x \in X$ proizvoljan. Tada $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n$ konvergira pa i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)y_n$ konvergira po pretpostavci. Stoga ako definiramo preslikavanje $T : X \to Y$ s $Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)y_n$, ono će biti dobro definirano.

Neka su $x, y \in X$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Tada:

$$\begin{aligned}T(\alpha x + \beta y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(\alpha x + \beta y)y_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n(x) + \beta a_n(y))y_n = \\ &= \alpha(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)y_n) + \beta(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(y)y_n) = \alpha T(x) + \beta T(y),\end{aligned}$$

pa je T linearno.

Neka je $x \in X$ takav da je $Tx = 0$. Tada:

$$0 = Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)y_n,$$

ali također i:

$$0 = \sum_{n=1}^{+\infty} 0y_n,$$

pa zato što je (y_n) topološka baza za Y slijedi $a_n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Stoga je $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 0x_n = 0$ pa je T injektivno.

Neka je sada $y \in Y$ proizvoljan. Tada $y = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(y)y_n$ konvergira pa i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(y)x_n$ konvergira. Označimo $x = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(y)x_n \in X$, tada je također $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n$ iz čega slijedi $b_n(y) = a_n(x), \forall n \in \mathbb{N}$. Sada je:

$$Tx = T(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(y)x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(y)y_n = y,$$

pa je T i surjektivno. Dakle, T je bijektivno linearno preslikavanje.

Za $\forall N \in N$ definiramo $T_N : X \to Y$ s $T_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n(x)y_n$. Ta preslikavanja su neprekidna jer su a_n neprekidni $\forall n \in \mathbb{N}$. Za $x \in X$ proizvoljan vrijedi:

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)y_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n(x)y_n = \lim_{N\to+\infty} T_N x$$

pa je niz $(T_N x)$ stoga ograničen. Sada po principu uniformne ograničenosti 1.1.2 slijedi da je i niz (T_N) ograničen, tj. $\exists C \in R$ takav da je $sup_{N\in\mathbb{N}}\|T_N\| \leqslant C < +\infty$. Sada slijedi:

$$\|Tx\| = \|\lim_{N\to+\infty} T_N x\| = \lim_{N\to+\infty}\|T_N x\| \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}}\|T_N x\| \leqslant \sup_{N\in\mathbb{N}}\|T_N\|\|x\| \leqslant C\|x\| < +\infty.$$

Dakle T je ograničen. Konačno, T je izomorfizam. □

Lema 3.3.5. *Neka je (e_n) ortonormirana baza Hilbertovog prostora H. Tada za svaki niz skalara (c_n), $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$ konvergira ako i samo ako $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2$ konvergira.*

Dokaz. Neka je (c_n) proizvoljan niz skalara. Definiramo $s_N = \sum_{n=1}^{N} c_n e_n$ i $t_N = \sum_{n=1}^{N}|c_n|^2$. Za $M, N \in \mathbb{N}$ takve da $N > M$ vrijedi:

$$\|s_N - s_M\|^2 = \|\sum_{n=M+1}^{N} c_n e_n\|^2 = \langle \sum_{n=M+1}^{N} c_n e_n, \sum_{m=M+1}^{N} c_m e_m\rangle = \sum_{n=M+1}^{N} c_n \sum_{m=M+1}^{N} \overline{c_m}\underbrace{\langle e_n, e_m\rangle}_{=\delta_{n,m}} =$$

$$= \sum_{n=M+1}^{N} c_n\overline{c_n} = \sum_{n=M+1}^{N} |c_n|^2 = t_N - t_M = |t_N - t_M|.$$

To znači da je $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$ Cauchyjev ako i samo ako je $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2$ Cauchyjev. A kako su H i $\mathbb{R}$ potpuni to znači da $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$ konvergira ako i samo ako $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2$ konvergira. □

Korolar 3.3.6. *Svake dvije ortonormirane baze (e_n) i (f_n) Hilbertovog prostora H su ekvivalentne.*

Dokaz. Neka je (c_n) proizvoljan niz skalara. Pretpostavimo da $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$ konvergira. Tada po 3.3.5 $\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|^2$ konvergira pa opet po 3.3.5 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n f_n$ konvergira. Analogno se dobije da konvergencija od $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n f_n$ povlači konvergenciju od $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$. Zbog proizvoljnosti od (c_n) sada prema 3.3.4 slijedi da su (e_n) i (f_n) ekvivalentne. □

3.4 Minimalnost i biortogonalnost

Definicija 3.4.1. *Niz (x_n) u Banachovom prostoru X je fundamentalan ako je $\overline{span}\{x_n\} = X$.*

Definicija 3.4.2. *Niz (x_n) u Banachovom prostoru X je minimalan ako $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Niz koji je minimalan i fundamentalan naziva se egzaktan.*

Primjer 3.4.3. *Neka je $C[\mathbb{T}]$ prostor svih neprekidnih kompleksnih 1-periodičnih funkcija na $\mathbb{R}$ (s normom uniformne konvergencija). Za niz $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ u $C[\mathbb{T}]$ definiran s $e_n(t) = e^{2\pi int}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, u poretku $(e_0, e_{-1}, e_1, e_{-2}, e_2, \dots)$ vrijedi da je fundamentalan i da postoji njemu biortogonalan niz u $C[\mathbb{T}]^*$, ali nije topološka baza.*

Dokaz. [6, str 153., Example 5.1., str. 458, Theorem 14.3.] □

Teorem 3.4.4. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Tada vrijedi:*
(a) Postoji (a_n) koji je biortogonalan s (x_n) ako i samo ako je (x_n) minimalan.
(b) Postoji jedinstveni (a_n) koji je biortogonalan s (x_n) ako i samo ako je (x_n) egzaktan.

Dokaz.
(a)
$\boxed{\Rightarrow}$
Pretpostavimo da je (a_n) koji je biortogonalan s (x_n). Neka su $m \in \mathbb{N}$ i $z \in span\{x_n\}_{n\neq m}$ proizvoljni pri čemu je $z = \sum_{j=1}^{N} c_{n_j} x_{n_j}$ gdje je $N \in \mathbb{N}$, $c_{n_1}, ..., c_{n_N} \in \mathbb{N}$ te $n_1, ..., n_N \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$ međusobno različiti. Tada vrijedi:

$$a_m(z) = a_m(\sum_{j=1}^{N} c_{n_j} x_{n_j}) = \sum_{j=1}^{N} c_{n_j} \underbrace{a_m(x_{n_j})}_{=0 \text{ jer je } m\neq n_j} = 0.$$

Zbog proizvoljnosti od $z \in span\{x_n\}_{n\neq m}$ slijedi da je $a_m = 0$ na $span\{x_n\}_{n\neq m}$ pa zato što je a_m neprekidan slijedi da je $a_m = 0$ na $\overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. A vrijedi $a_m(x_m) = 1$ pa je zato $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. Zbog proizvoljnosti od $m \in \mathbb{N}$ slijedi da je (x_n) minimalan.
$\boxed{\Leftarrow}$
Pretpostavimo da je (x_n) minimalan. Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan i $E = \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. Tada je E zatvoren potprostor od X koji ne sadrži x_m pa po korolaru Hahn-Banachovog teorema 1.2.4 slijedi da postoji $a_m \in X^*$ takav da je $a_m(x_m) = 1$ i $a_m(x) = 0$, $\forall x \in E$. Provodeći ovaj postupak $\forall m \in \mathbb{N}$ dobivamo niz (a_n) koji je biortogonalan s (x_n).
(b)
$\boxed{\Rightarrow}$
Pretpostavimo da postoji jedinstven niz (a_n) koji je biortogonalan s (x_n). Prema (a), (x_n) je minimalan. Pretpostavimo da je $f \in X^*$ takav da je $f(x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je za $m, n \in \mathbb{N}$ proizvoljne:

$$(f + a_m)(x_n) = \underbrace{f(x_n)}_{=0} + \underbrace{a_m(x_n)}_{=\delta_{m,n}} = \delta_{m,n},$$

pa je $(f + a_n)$ biortogonalan s (x_n). Zbog jedinstvenosti biortogonalnog niza sada slijedi da je $f + a_n = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, tj. $f = 0$. Pa prema korolaru Hahn-Banachovog teorema 1.2.5 slijedi da je (x_n) fundamentalan.
$\boxed{\Leftarrow}$
Pretpostavimo da je (x_n) egzaktan. Egzaktan niz je i minimalan pa prema (a) postoji neki niz (a_n) koji je biortogonalan s (x_n). Neka je (b_n) proizvoljan niz koji je biortogonalan s

(x_n). Tada za $m, n \in \mathbb{N}$ proizvoljne vrijedi:

$$(a_m - b_m)(x_n) = \underbrace{a_m(x_n)}_{=\delta_{m,n}} - \underbrace{b_m(x_n)}_{=\delta_{m,n}} = 0$$

Dakle $a_m - b_m$ iščezava na (x_n) koji je fundamentalan, $\forall m \in \mathbb{N}$ pa slijedi iz korolara Hahn-Banachovog teorema 1.2.5 da je $a_m - b_m = 0$, tj. $a_m = b_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Dakle niz (a_n) koji je biortogonalan s (x_n) je jedinstven. □

Korolar 3.4.5. *Za svaku topološku bazu (x_n) Banachovog prostora X vrijedi da je egzaktna i jedini njoj biortogonalan niz je njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala (a_n).*

Dokaz. (x_n) i (a_n) biortogonalni prema 3.2.5 pa je prema 3.4.4 (x_n) minimalan. A (x_n) je topološka baza pa je po definiciji fundamentalna. Dakle (x_n) je egzaktna pa iz 3.4.4 slijedi da je (a_n) jedini niz koji je biortogonalan s (x_n). □

Teorem 3.4.6. ***(Müntz–Szászov teorem)*** *Neka je (k_n) niz cijelih brojeva takav da je $0 \leqslant k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$. $C[0,1]$ promatramo s normom uniformne konvergencije. Tada je (x^{k_n}) je fundamentala u $C[0,1]$ ako i samo ako je $k_1 = 0$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k_n} = +\infty$.*

Dokaz. [3, str. 194 i str. 196, Exercise 1.] □

Primjer 3.4.7. *$(x^n)_{n\geqslant 0}$ je prema 3.4.6 fundamentalan u $C[0,1]$ (s normom uniformne konvergencije), ali je prema 3.4.6 i $(x^{2n})_{n\geqslant 0}$ fundamentalan u $C[0,1]$ pa stoga $(x^n)_{n\geqslant 0}$ nije minimalan pa ni topološka baza.*

3.5 Nezavisnost

Definicija 3.5.1. *Niz (x_n) u Banachovom prostoru X je:*
(a) konačno nezavisan ako $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0 \Rightarrow c_1 = \ldots = c_N = 0$,
(b) ω-nezavisan ako $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n = 0 \Rightarrow c_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$,
(c) bazni ako je topološka baza za $\overline{span}\{x_n\}$.

Teorem 3.5.2. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Tada vrijedi:*
(a) (x_n) je bazni niz $\Rightarrow$ (x_n) je minimalan,
(b) (x_n) je minimalan $\Rightarrow$ (x_n) je ω-nezavisan,
(c) (x_n) ω-nezavisan $\Rightarrow$ (x_n) je konačno nezavisan.

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je (x_n) bazni niz. Tada je (x_n) baza za $M = \overline{span}\{x_n\}$ pa postoji $(a_n) \subseteq M^*$ koji je biortogonalan s (x_n).
Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada je $a_m = 0$ na $span\{x_n\}_{n\neq m}$ pa je zbog neprekidnosti od a_m onda $a_m = 0$ na $\overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. Kako vrijedi $a_m(x_m) = 1$, slijedi da $x_m \notin \overline{span}\{x_n\}_{n\neq m}$. Zbog

proizvoljnosti od $m \in \mathbb{N}$ imamo da je (x_m) minimalan.
(b) Pretpostavimo da je (x_n) minimalan. Neka je (c_n) niz skalara takav da je $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n = 0$. Pretpostavimo da (x_n) nije ω-nezavisan, tj. da $\exists m \in \mathbb{N}$ takav da $c_m \neq 0$. Tada iz $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n = 0$ slijedi:

$$x_m = -\frac{1}{c_m} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{+\infty} c_n x_n \in \overline{span}\{x_n\}_{n \neq m},$$

pa (x_n) nije minimalan što je kontradikcija. Dakle, pretpostavka je pogrešna i (x_n) je ω-nezavisan.
(c) Pretpostavimo da je (x_n) ω-nezavisan. Neka su $N \in \mathbb{N}$ i $c_1, ..., c_N \in \mathbb{F}$ proizvoljni takvi da je $\sum_{n=1}^{N} c_n x_n = 0$. Definiramo (c_n) tako da $c_n = 0, \forall n > N$. Tada je i $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n = 0$ pa je $c_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, zbog ω-nezavisnosti od (x_n). A to znači da je $c_1 = \cdots = c_N = 0$ pa je (x_n) konačno nezavisan. □

Primjer 3.5.3. *Niz iz (e_n) u $C[\mathbb{T}]$ iz 3.4.3 je fundamentalan i minimalan, ali nije topološka baza. Tvrdnja slijedi iz 3.4.3 i 3.4.4(a).*

Primjer 3.5.4. *Niz $(x^n)_{n \geqslant 0}$ u $C[0,1]$ iz 3.4.7 je fundamentalan i ω-nezavisan, ali nije topološka baza. Prema 3.4.7 znamo da je fundamentalan i da nije topološka baza pa preostaje samo vidjeti da je ω-nezavisan.*

Dokaz. [6, str. 160, Example 5.10. (b)] □

Primjer 3.5.5. *Postoji Banachov prostor koji sadrži niz koji je fundamentalan i konačno nezavisan, ali nije ω-nezavisan.*

Dokaz. [6, str. 160, Example 5.11.] □

3.6 Karakterizacija topoloških baza

Definicija 3.6.1. *Neka je niz (x_n) u Banachovom prostoru X minimalan. Tada prema 3.4.4 postoji njemu biortogonalan niz (a_n). Sada $\forall N \in \mathbb{N}$ možemo definirati definirati operatore parcijalne sume:*

$$S_N x = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n, \quad \forall x \in X.$$

Operatori parcijalne sume su linearni funkcionali jer su a_n linearni funkcionali $\forall n \in \mathbb{N}$.

Napomena 3.6.2. *Iz prethodne definicije se vidi da za dani (x_n) operatori parcijalne sume nisu jedinstveno određeni nego ovise o izboru biortogonalnog niza (a_n). Ako je niz (x_n) topološka baza onda je prema 3.4.4 (x_n) minimalan i (a_n) je jedinstveno određen te je zato prethodna definicija usklađena s prijašnjom definicijom operatora parcijalne sume 3.1.7.*

Teorem 3.6.3. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) (x_n) je topološka baza za X,
(b) postoji (a_n) biortogonalan s (x_n) takav da za njihove operatore parcijalne sume S_N vrijedi:

$$x = \lim_{N\to+\infty} S_N x, \quad \forall x \in X.$$

(c) (x_n) je fundamentalan i postoji njemu biortogonalan (a_n) takav da za njihove operatore parcijalne sume S_N vrijedi:

$$\lim_{N\to+\infty} S_N x \text{ konvergira } \forall x \in X,$$

(d) (x_n) je egzaktan i za operatore parcijalne sume S_N vrijedi $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N x\| < +\infty$, $\forall x \in X$,
(e) (x_n) je egzaktan i za operatore parcijalne sume S_N vrijedi $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\| < +\infty$.

Dokaz.
$\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$
Pretpostavimo da je (x_n) topološka baza za X. Za (a_n) uzmemo niz koeficijentnih funkcionala od (x_n) pa tada tvrdnja slijedi po definiciji topološke baze.
$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(c)}}$
Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Za $x \in X$ proizvoljan tada je:

$$x = \lim_{N\to+\infty} S_N x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n \in \overline{span}\{x_n\}$$

pa slijedi da $\lim_{N\to+\infty} S_N x$ konvergira i da je $X = \overline{span}\{x_n\}$, tj. (x_n) je fundamentalan.
$\boxed{\text{(c)}\Rightarrow\text{(d)}}$
Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Prema pretpostavci postoji biortogonalan niz za (x_n) pa je po 3.4.4 (x_n) minimalan. Nadalje, prema pretpostavci je (x_n) fundamentalan pa je i egzaktan. Također, za $\forall x \in X$ vrijedi da $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergira pa je ograničen, tj. $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N x\| < +\infty$.
$\boxed{\text{(d)}\Rightarrow\text{(e)}}$
Pretpostavimo da je (x_n) egzaktan i da $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N x\| < +\infty$, $\forall x \in X$. Pretpostavka ima

smisla jer je (x_n) egzaktan pa je minimalan pa po 3.4.4 postoji neki njemu biortogonalan (a_n) tako da možemo definirati operatore parcijalne sume S_N. Sada po principu uniformne ograničenosti 1.1.2 slijedi $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\| < +\infty$.

$\boxed{\text{(e)}\Rightarrow\text{(b)}}$

Pretpostavimo da je (x_n) egzaktan i da je $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\| < +\infty$. Kao u prethodnom slučaju pretpostavka ima smisla jer je (x_n) egzaktan. Neka je sada $x \in span\{x_n\}$ proizvoljan pa $\exists M \in \mathbb{N}$, $\exists c_1, \dots, c_M \in \mathbb{F}$ takvi da $x = \sum_{m=1}^{M} c_m x_m$. Tada za $N \geqslant M$ proizvoljan vrijedi:

$$S_N x = S_N(\sum_{m=1}^{M} c_m x_m) = \sum_{m=1}^{M} c_m S_N x_m = \sum_{m=1}^{M} c_m x_m = x.$$

Zbog toga je $x = lim_{N\to+\infty} S_N x$ jer $(S_N x)_{N\in\mathbb{N}}$ postane statični niz s vrijednošću x nakon konačno mnogo članova. Dakle, $x = lim_{N\to+\infty} S_N x$, $\forall x \in span\{x_n\}$.

Neka je sada $x \in \overline{span}\{x_n\}$ proizvoljan i $C = sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|$ pa je po pretpostavci $0 \leqslant C < +\infty$. Kako je $span\{x_n\}$ gust u $\overline{span}\{x_n\}$, za $\epsilon > 0$ proizvoljan $\exists y \in span\{x_n\}$ takav da je $\|x - y\| < \frac{\epsilon}{1+C}$ i neka su $M \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_M \in \mathbb{F}$ takvi da je $y = \sum_{m=1}^{M} c_m x_m$. Tada za $N \geqslant M$ proizvoljan vrijedi:

$$\begin{aligned}\|x - S_N x\| &= \|x - y + y - S_N y + S_N y - S_N x\| \leqslant \|x - y\| + \underbrace{\|y - S_N y\|}_{=0 \text{ jer je } y\in span\{x_n\}} + \underbrace{\|S_N y - S_N x\|}_{\leqslant \|S_N\|\|y-x\|} \leqslant \\ &\leqslant \|x - y\| + \underbrace{\|S_N\|}_{\leqslant sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|=C} \|x - y\| \leqslant (1 + C)\|x - y\| < [C \geqslant 0 \text{ pa je i } 1 + C \geqslant 0] < \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Dakle $x = lim_{N\to+\infty} S_N x$, $\forall x \in \overline{span}\{x_n\}$, a (x_n) je egzaktan pa i fundamentalan pa vrijedi $X = \overline{span}\{x_n\}$. Stoga konačno imamo $x = lim_{N\to+\infty} S_N x$, $\forall x \in X$.

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Tada za $x \in X$ proizvoljan vrijedi:

$$x = \lim_{N\to+\infty} S_N x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) x_n. \tag{3.6}$$

Pretpostavimo da postoji niz skalara (c_n) takav da vrijedi:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n. \tag{3.7}$$

Tada vrijedi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) x_n = x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n$$

pa je za $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan:

$$a_m(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n) = a_m(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_n).$$

Koristeći neprekidnost od a_m dobivamo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \underbrace{a_m(x_n)}_{=\delta_{m,n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \underbrace{a_m(x_n)}_{=\delta_{m,n}}$$

pa jer su (x_n) i (a_n) biortogonalni slijedi $a_m(x) = c_m$. Zbog proizvoljnosti od $m \in \mathbb{N}$ slijedi $(a_n(x)) = (c_n)$ pa je zapis od x oblika (3.7) jedinstven, a znamo da takav zapis postoji zbog (3.6). Zbog proizvoljnosti od $x \in X$ sada slijedi da je (x_n) topološka baza za X. □

3.7 Karakterizacija minimalnih nizova i topoloških baza

Teorem 3.7.1. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X takav da je $x_n \neq 0$ i $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) (x_n) je minimalan,
(b) $\forall M \in \mathbb{N}$, $\exists C_M$ takav da je $1 \leqslant C_M < +\infty$ i $\forall N \geqslant M$, $\forall c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{F}$ vrijedi:

$$\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\| \leqslant C_M \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|.$$

Dokaz.
$\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$
Pretpostavimo da je (x_n) minimalan. Po 3.4.4 postoji (a_n) biortogonalan s (x_n) pa postoje i operatori parcijalne sume. Neka su $M, N \in \mathbb{N}$ proizvoljni takvi da je $N \geqslant M$ i neka su $c_0, \ldots, c_N \in \mathbb{F}$. Tada je:

$$\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\| = [S_M x_n = x_n \text{ ako je } n \leqslant M, \text{inače je } = 0] = \|\sum_{n=1}^{N} c_n S_M x_N\| = \|S_M(\sum_{n=1}^{N} c_n x_N)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|S_N\| \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_N\|.$$

Sada je dovoljno definirati $C_M = \|S_M\|$ jer je $C_M \geqslant 1$ očito zadovoljeno iz dobivene nejednakosti.
$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Neka je $E = span\{x_n\}$ i $C_0 = 0$. Neka je $x \in E$ proizvoljan pa $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{F}$ takvi da je $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$. Sada za proizvoljan $M \in \mathbb{N}$ takav da je $1 \leqslant M \leqslant N$ vrijedi:

$$|c_M| \|x_M\| = \|c_M x_M\| = \|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n - \sum_{n=1}^{M-1} c_n x_n\| \leqslant \|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\| + \|\sum_{n=1}^{M-1} c_n x_n\| \leqslant$$

$$\leqslant [\text{prema pretpostavci}] \leqslant C_M \underbrace{\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|}_{=\|x\|} + C_{M-1} \underbrace{\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|}_{=\|x\|} = (C_M + C_{M-1})\|x\|.$$

Prema uvjetima teorema je $x_M \neq 0$ pa slijedi:

$$|c_M| \leqslant \frac{C_M + C_{M-1}}{\|x_M\|} \|x\|, \quad \forall M \in \mathbb{N} \text{ takav da je } 1 \leqslant M \leqslant N. \tag{3.8}$$

Ako je $x = 0$ iz (3.8) slijedi $c_1 = \cdots = c_N = 0$ pa je (x_n) konačno nezavisan. S obzirom na to da je $E = span\{x_n\}$ onda slijedi da je (x_n) Hamelova baza za E.
Tada za svaki $x \in E$ postoji jedinstven niz skalara $(a_n(x))$ takav da vrijedi $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) x_n$ gdje je samo konačno mnogo elemenata od $(a_n(x))$ različito od 0. Očito su s a_n definirani linearni operatori na E. Nadalje vrijedi $a_n(x) = c_n$ za $1 \leqslant n \leqslant N$ i $a_n(x) = 0$ za $n > N$ zbog jedinstvenosti zapisa. Zato a_n, $\forall n \in \mathbb{N}$, zadovoljava (3.8) (za $n > N$ vrijedi $a_n = 0$ pa zadovoljava nejednakost trivijalno), tj. vrijedi:

$$|a_n(x)| \leqslant \frac{C_M + C_{M-1}}{\|x_n\|} \|x\|.$$

Zbog proizvoljnosti od $x \in E$ slijedi da su a_n neprekidni $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ po Hahn-Banachovom teoremu **??** postoji neprekidno proširenje od a_n na X koje ćemo isto označiti s a_n. Iz jedinstvenosti zapisa od $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) x_n$ i jednakosti $x_n = 1x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, slijedi da su (x_n) i (a_n) biortogonalni pa je (x_n) minimalan prema 3.4.4. □

Teorem 3.7.2. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) (x_n) je topološka baza za X.
(b) (x_n) je fundamentalan, $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i $\exists C \geqslant 1$ takav da $\forall N, M \in \mathbb{N}$ takve da $N \geqslant M$ i $\forall c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{F}$ vrijedi:

$$\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\| \leqslant C \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|. \tag{3.9}$$

Kada tvrdnje vrijede najbolja (najmanja) konstanta C u (3.9) *je bazna konstanta* $C = \sup_{N \in \mathbb{N}} \|S_N\|$.

Dokaz.
$\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$
Pretpostavimo da je (x_n) topološka baza za X. Tada je $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Neka je $C = sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|$ njena bazna konstanta, a znamo da vrijedi $1 \leqslant C < +\infty$. Neka su $M, N \in \mathbb{N}$ proizvoljni takvi da je $N \geqslant M$ i neka su $c_0, \dots, c_N \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Tada je:

$$\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\| = [S_M x_n = x_n \text{ ako je } n \leqslant M, \text{ inače je } = 0] = \|\sum_{n=1}^{N} c_n S_M x_N\| = \|S_M(\sum_{n=1}^{N} c_n x_N)\| \leqslant$$
$$\leqslant \underbrace{\|S_N\|}_{\leqslant sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|=C} \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_N\| \leqslant C\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_N\|.$$

$\boxed{\text{(b)}\Leftarrow\text{(a)}}$
Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Tada je prema 3.7.1 (x_n) minimalan pa prema 3.4.4 postoji (a_n) biortogonalan s (x_n). Također, prema pretpostavci (x_n) je fundamentalan pa je egzaktan. Sada je prema 3.6.3 dovoljno pokazati da je $\sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\| < +\infty$.
Neka je $x = \sum_{n=1}^{M} c_n x_n \in span\{x_n\}$. Za $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan vrijedi:

$$N \leqslant M \quad \Rightarrow \quad \|S_N x\| = \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| \leqslant [\text{prema pretpostavci}] \leqslant C\|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\|$$
$$N > M \quad \Rightarrow \quad \|S_N x\| = \|\sum_{n=1}^{M} c_n x_n\| = \|x\| = \underbrace{1}_{\leqslant C}\|x\| \leqslant C\|x\|.$$

Dakle, imamo da vrijedi $\|S_N x\| \leqslant C\|x\|$, $\forall x \in span\{x_n\}$. Kako je S_N neprekidan, $span\{x_n\}$ gust u $\overline{span}\{x_n\}$ te je $\overline{span}\{x_n\} = X$ jer je (x_n) topološka baza, slijedi da je $\|S_N x\| \leqslant C\|x\|$, $\forall x \in X$, tj. $\|S_N\| \leqslant C$. Zbog proizvoljnosti od $N \in \mathbb{N}$ slijedi da je $sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\| \leqslant C < +\infty$ što je i trebalo pokazati.
Iz dokaza prvog smjera slijedi da $C = sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|$ zadovoljava (3.9), a iz dokaza drugog smjera slijedi da za svaki C koji zadovoljava (3.9) vrijedi $C \geqslant sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|$ pa je zato $C = sup_{N\in\mathbb{N}}\|S_N\|$ najbolja (najmanja) konstanta. □

3.8 Topološke baze duala

Definicija 3.8.1. *Neka je* $\hat{\cdot} : X \to X^{**}$ *definirano s* $\hat{x}f = f(x)$, $\forall x \in X$, $\forall f \in X^*$. *Nazivamo ga kanonsko preslikavanje između* X *i* X^{**}. *Prema 1.1.1* $\hat{\cdot}$ *je neprekidan linearni operator. Ako je* $\hat{\cdot}$ *surjekcija, onda kažemo da je* X *refleksivan.*

Lema 3.8.2. *Neka je* (x_n) *minimalan u Banachovom prostoru* X *i neka je* (a_n) *biortogonalan s* (x_n). *Tada je* (a_n) *minimalan u* X^* *i* $(\hat{x}_n)$ *je biortogonalan s njim.*

Dokaz. Za $m, n \in \mathbb{N}$ proizvoljne vrijedi:

$$\hat{x_n} a_m = a_m(x_n) = \delta_{m,n}.$$

Dakle, $(\hat{x_n})$ je biortogonalan s (a_n) pa je stoga prema 3.4.4 (a_n) minimalan. □

Napomena 3.8.3. *U 3.8.2 se ne mogu zamijeniti pojmovi minimalan i egzaktan. Standardna topološka baza* (e_n) *za* l^1 *je egzaktna, ali njoj biortogonalni niz je opet* (e_n)*, a on nije fundamentalan u* $l^\infty = {l^1}^*$.

Napomena 3.8.4. *Adjungirani operator označava adjungirani operator na Banachovim prostorima definiran u 1.3.1, a ne standardni adjungirani operator na Hilbertovim prostorima.*

Teorem 3.8.5. *Neka je* (x_n) *topološka baza Banachovog prostora X. Tada je njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala* (a_n) *baza za* $\overline{span}\{a_n\}$ *u* X^* *čiji pridruženi niz koeficijentnih funkcionala je* $(\hat{x_n})$ *(promatran u* $\overline{span}\{a_n\}^*$*).*

Dokaz. Topološka baza (x_n) je minimalna prema 3.4.4 pa je prema 3.8.2 i (a_n) minimalan. Kako je (a_n) trivijalno fundamentalan u $\overline{span}\{a_n\}$, on je i egzaktan u $\overline{span}\{a_n\}$. Sada za $m, n \in \mathbb{N}$ proizvoljne slijedi:

$$\hat{x_n} a_m = a_m(x_n) = \delta_{m,n},$$

pa je zato $(\hat{x_n})$ (promatran u $\overline{span}\{a_n\}^*$) u biortogonalan s (a_n). Sada je prema 3.6.3 dovoljno pokazati da su operatori parcijalne sume T_N koji su pridruženi nizu (a_n) pomoću njemu biortogonalnog $(\hat{x_n})$ uniformno ograničeni. Za $\forall N \in \mathbb{N}$ i $\forall f \in \overline{span}\{a_n\}$ vrijedi:

$$T_N(f) = \sum_{n=1}^{N} \hat{x_n}(f) a_n = \sum_{n=1}^{N} f(x_n) a_n. \tag{3.10}$$

Neka su S_N operatori parcijalne sume pridruženi topološkoj bazi (x_n), tada za njih vrijedi $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| < +\infty$ prema 3.6.3. Svaki S_N je neprekidan linearni operator $X \to X$ pa prema 1.3.1 postoje adjungirani operatori ${S_N}^* : X^* \to X^*$. Sada za $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan te $\forall x \in X$ i $\forall f \in X^*$ vrijedi:

$$\begin{aligned} {S_N}^*(f)x = f(S_N x) = f(\sum_{n=1}^{N} a_n(x) x_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n(x) f(x_n) = [\text{množenje u } \mathbb{F} \text{ je komutativno}] = \\ = \sum_{n=1}^{N} f(x_n) a_n(x) = (\sum_{n=1}^{N} f(x_n) a_n)(x) \underset{(3.10)}{=} T_N(f)x. \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $T_N = {S_N}^*$ pa je tada $\|T_N\| = \|{S_N}^*\|$. Kako prema 1.3.1 vrijedi $\|{S_N}^*\| = \|S_N\|$ slijedi $\|T_N\| = \|S_N\|$. Sada je $\sup_{N\in\mathbb{N}} \|T_N\| = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| < +\infty$ što je i trebalo pokazati. Zbog jedinstvenosti iz 3.4.4 $(\hat{x_n})$ su pridruženi koeficijentni funkcionali od (a_n). □

Korolar 3.8.6. *Neka je (x_n) topološka baza refleksivnog Banachovog prostora X. Tada je njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala (a_n) baza za X^*.*

Dokaz. Prema 3.8.5 (a_n) je topološka baza za $\overline{span}\{x_n\}$ pa je dovoljno pokazati da je (a_n) fundamentalan u X^*. Neka je $f \in X^{**}$ takav da vrijedi $f(a_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Kako je X refleksivan, onda je $f = \hat{x}$ za neki $x \in X$ pa zato vrijedi:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \hat{x}(a_n)x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} f(a_n)x_n = 0.$$

Zato je $f = \hat{x} = \hat{0} = 0$ pa je prema korolaru Hahn-Banachovog teorema 1.2.5 (a_n) fundamentalan što je i trebalo pokazati. □

Korolar 3.8.7. *Neka je X refleksivan Banachov prostor. Neka su (x_n) i (y_n) topološke baze od X te (a_n) i (b_n) redom njihovi pridruženi nizovi koeficijentnih funkcionala. Ako vrijedi $(x_n) \sim (y_n)$ onda vrijedi $(a_n) \sim (b_n)$.*

Dokaz. Prema 3.8.6 (a_n) i (b_n) su topološke baze od X^*. S obzirom da je $(x_n) \sim (y_n)$ slijedi da postoji ograničeni izomorfizam $T : X \to X$ takav da vrijedi $Tx_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada je prema 1.3.1 adjungirani operator $T^* : X^* \to X^*$ također ograničeni izomorfizam. Za $m, n \in \mathbb{N}$ proizvoljne vrijedi:

$$(T^*(b_n))(x_m) = b_n(T(x_m)) = b_n(y_m) = \delta_{m,n} = a_n(x_m).$$

Zbog fundamentalnosti od (x_n) odavde slijedi $T^*(b_n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ pa je zato $(a_n) \sim (b_n)$. □

Poglavlje 4

Bezuvjetne baze

4.1 Definicije i osnovna svojstva

Definicija 4.1.1. *Topološka baza (x_n) Banachovog prostora X naziva se bezuvjetna baza za X ako red u 3.1 konvergira bezuvjetno, $\forall x \in X$. Tada je za (a_n) njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala prema 2.2.5 za σ proizvoljnu permutaciju od $\mathbb{N}$, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}$, $\forall x \in X$. Topološka baza koja nije bezuvjetna baza naziva se uvjetna baza.*

Lema 4.1.2. *Neka je (x_n) niz u Banachovom prostoru X. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) (x_n) je bezuvjetna baza za X.
(b) $(x_{\sigma(n)})$ je topološka baza za X za svaku permutaciju σ od $\mathbb{N}$.

Kada vrijede ove tvrdnje, za (a_n) pridruženi niz koeficijentnih funkcionala od (x_n) vrijedi da je $(a_{\sigma(n)})$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala od $(x_{\sigma(n)})$, $\forall \sigma$ permutaciju od $\mathbb{N}$.

Dokaz.
$\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$
Pretpostavimo da je (x_n) bezuvjetna baza za X. Neka je σ proizvoljna permutacija od $\mathbb{N}$. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Tada je po definiciji $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}(x) x_{\sigma(n)}$. Neka je (c_n) niz

skalara takav da $x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_{\sigma(n)}$. Za $m \in M$ proizvoljan tada vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}(x) x_{\sigma(n)} = x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_{\sigma(n)} \\
\underset{a_{\sigma(m)}(\cdot)}{\Longrightarrow} & a_{\sigma(m)}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}(x) x_{\sigma(n)}) = a_{\sigma(m)}(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x_{\sigma(n)}) \\
\underset{\text{neprekidnost } a_{\sigma(m)}}{\Longrightarrow} & \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}(x) \underbrace{a_{\sigma(m)}(x_{\sigma(n)})}_{=\delta_{\sigma(m),\sigma(n)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \underbrace{a_{\sigma(m)}(x_{\sigma(n)})}_{=\delta_{\sigma(m),\sigma(n)}} \\
\Longrightarrow & a_{\sigma(m)}(x) = c_m.
\end{aligned}
$$

Dakle, $(c_n) = (a_{\sigma(n)}(x))$ pa je zadovoljen uvjet jedinstvenosti iz definicije topološke baze. Zbog proizvoljnosti od $x \in X$ i σ, $(x_{\sigma(n)})$ je topološka baza za X, za svaku permutaciju σ od $\mathbb{N}$. Sada iz jednakosti $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}(x) x_{\sigma(n)}$ slijedi da je topološkoj bazi $(x_{\sigma(n)})$ pridružen niz koeficijentnih funkcionala $(a_{\sigma(n)})$.

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(a)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Neka je za svaku σ permutaciju od N, $(a_{\sigma,\sigma(n)})$ pridruženi niz koeficijentnih funkcionala topološke baze $(x_{\sigma(n)})$. Tada je prema 3.4.4 za svaku σ permutaciju od N, $(a_{\sigma,\sigma(n)})$ jedini niz koji je biortogonalan s $(x_{\sigma(n)})$, tj. $(a_{\sigma,n})$ je jedini niz koji je biortogonalan s (x_n). Dakle za bilo koje σ_1 i σ_2 permutacije od N vrijedi $(a_{\sigma_1,n}) = (a_{\sigma_2,n})$. Neka je id identiteta na N i neka je σ proizvoljna permutacija od N. Tada vrijedi $(a_{id,n}) = (a_{\sigma,n})$ pa je $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma,\sigma(n)}(x) x_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{id,\sigma(n)}(x) x_{\sigma(n)}$. Zbog proizvoljnosti od σ red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{id,n}(x) x_n$ konvergira bezuvjetno. Dakle (x_n) je bezuvjetna baza. □

Lema 4.1.3. *Neka su X i Y Banachovi prostori, (x_n) niz u X i $T : X \to Y$ izomorfizam. Ako je (x_n) bezuvjetna baza za X, onda je (Tx_n) bezuvjetna baza za Y.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (x_n) bezuvjetna baza za X. Neka je (a_n) njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Prema 3.3.1 (Tx_n) je topološka baza za Y i $(a_n T^{-1})$ je njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Neka je σ proizvoljna permutacija od N i $y \in Y$ proizvoljan, tada postoji $x \in X$ takav da je $Tx = y$ pa vrijedi:

$$
y = Tx \underset{4.1.2}{=} T(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}(x) x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}(x) T(x_{\sigma(n)}) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}(T^{-1}y) T(x_{\sigma(n)}).
$$

pa zbog proizvoljnosti od σ red $\sum_{n=1}^{+\infty} a(T^{-1}y) T(x_n)$ konvergira bezuvjetno, tj. (Tx_n) je bezuvjetna baza za Y. □

Definicija 4.1.4. *Neka je (x_n) bezuvjetna baza Banachovog prostora X i (a_n) njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala.*
Za svaki konačan $F \subseteq \mathbb{N}$, definiramo operator parcijalne sume $S_F : X \to X$ sa:

$$S_F(x) = \sum_{n \in F} a_n(x) x_n, \quad \forall x \in X.$$

Za svaki konačan $F \subseteq \mathbb{N}$ i svaki skup $\mathcal{E} = (\epsilon_n)_{n \in F}$ takav da je $\epsilon_n \in \{-1, +1\}$, $\forall n \in F$, definiramo operator parcijalne sume $S_{F,\mathcal{E}} : X \to X$ sa:

$$S_{F,\mathcal{E}}(x) = \sum_{n \in F} \epsilon_n a_n(x) x_n, \quad \forall x \in X.$$

Za svaki konačan $F \subseteq \mathbb{N}$ i svaki skup skalara $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in F}$ takav da je $|\lambda_n| \leqslant 1$, $\forall n \in F$, definiramo operator parcijalne sume $S_{F,\Lambda} : X \to X$ sa:

$$S_{F,\Lambda}(x) = \sum_{n \in F} \lambda_n a_n(x) x_n, \quad \forall x \in X.$$

Svi ovako definirani operatori parcijalne sume su neprekidni jer su svi a_n neprekidni i jer su sve sume konačne.

Teorem 4.1.5. *Neka je (x_n) bezuvjetna baza Banachovog prostora X. Tada vrijedi:*
(a) Za svaki $x \in X$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \|x\|_F &= \sup_F \|S_F(x)\| < +\infty, \\ \|x\|_{\mathcal{E}} &= \sup_{F,\mathcal{E}} \|S_{F,\mathcal{E}}(x)\| < +\infty, \\ \|x\|_\Lambda &= \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}(x)\| < +\infty. \end{aligned}$$

(b) Vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_F &= \sup_F \|S_F\| < +\infty, \\ \mathcal{K}_{\mathcal{E}} &= \sup_{F,\mathcal{E}} \|S_{F,\mathcal{E}}\| < +\infty, \\ \mathcal{K}_\Lambda &= \sup_{F,\Lambda} \|S_{F,\Lambda}\| < +\infty. \end{aligned}$$

(c) Vrijedi $\|\cdot\|_F \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \leqslant 2\|\cdot\|_F$ i $\mathcal{K}_F \leqslant \mathcal{K}_{\mathcal{E}} \leqslant 2\mathcal{K}_F$.

(d) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *vrijedi* $\|\cdot\|_{\mathcal{E}} = \|\cdot\|_{\Lambda}$ *i* $\mathcal{K}_{\mathcal{E}} = \mathcal{K}_{\Lambda}$.
(e) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *vrijedi* $\|\cdot\|_{\mathcal{E}} \leqslant \|\cdot\|_{\Lambda} \leqslant 2\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ *i* $\mathcal{K}_{\mathcal{E}} \leqslant \mathcal{K}_{\Lambda} \leqslant 2\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.
(f) $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ *i* $\|\cdot\|_{\Lambda}$ *su norme na X koje su ekvivalentne normi* $\|\cdot\|$ *jer vrijedi:*

$$\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_F \leqslant \mathcal{K}_F\|\cdot\|,$$
$$\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_{\mathcal{E}} \leqslant \mathcal{K}_{\mathcal{E}}\|\cdot\|,$$
$$\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_{\Lambda} \leqslant \mathcal{K}_{\Lambda}\|\cdot\|.$$

Dokaz. □

Dokaz.
(a) Slijedi iz 2.2.8.
(b) Slijedi iz (a) i principa uniformne ograničenosti 1.1.2.
(c) Slijedi iz 2.2.7 (a).
(d) Slijedi iz 2.2.7 (b).
(e) Slijedi iz 2.2.7 (c).
(f) Svojstva norme za $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ i $\|\cdot\|_{\Lambda}$ slijede iz svojstava norme od $\|\cdot\|$, a nejednakosti slijede iz (a) i (b). □

Definicija 4.1.6. *Neka je* (x_n) *bezuvjetna baza Banachovog prostora X. Tada za nju definiramo* $\mathcal{K}_F$, $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{K}_{\Lambda}$, $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ *i* $\|\cdot\|_{\Lambda}$ *kao u 4.1.5.*

Definicija 4.1.7. *Neka je* (x_n) *bezuvjetna baza Banachovog prostora X. Tada* $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ *nazivamo bezuvjetna bazna konstanta.*

Napomena 4.1.8. *Bezuvjetna bazna konstanta nije nužno neovisna o izboru norme, odabir neke druge ekvivalentne norme može promijeniti baznu konstantu.*

Propozicija 4.1.9. *Neka je* (x_n) *bezuvjetna baza Banachovog prostora X. Tada je* $1 \leqslant C \leqslant \mathcal{K}_{\mathcal{E}}$.

Dokaz.

$$\begin{aligned} 1 \underset{3.2.7}{\leqslant} C = \sup_{N\in\mathbb{N}} \|S_N\| = \sup_{\substack{F,\mathcal{E} \\ F=\{1,\ldots,N\}, N\in\mathbb{N} \\ \mathcal{E}=(1)_{n\in F}}} \|S_N\| \leqslant \\ \leqslant [\text{supremum skupa je manji ili jednak supremumu njegovog nadskupa}] \leqslant \sup_{F,\mathcal{E}} \|S_N\| = \\ = \mathcal{K}_{\mathcal{E}}. \end{aligned}$$

□

4.2 Karakterizacija bezuvjetnih baza

Teorem 4.2.1. *Neka je (x_n) fundamentalan niz u Banachovom prostoru X takav da $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
(a) (x_n) je bezuvjetna baza za X.
(b) $\exists C_1 \geqslant 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall c_1, \dots, c_N \in \mathbb{F}$, $\forall \epsilon_1, \dots, \epsilon_N \in \{-1, +1\}$ vrijedi:

$$\|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n c_n x_n\| \leqslant C_1 \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|. \tag{4.1}$$

(c) $\exists C_2 \geqslant 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall b_1, \dots, b_N, c_1, \dots, c_N \in \mathbb{F}$ vrijedi:

$$|b_1| \leqslant |c_1|, \dots, |b_N| \leqslant |c_N| \Rightarrow \|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \leqslant C_2 \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|.$$

(d) $\exists 0 < C_3 \leqslant 1 \leqslant C_4 < +\infty$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall c_1, \dots, c_N \in \mathbb{F}$ vrijedi:

$$C_3 \|\sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n\| \leqslant \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| \leqslant C_4 \|\sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n\|.$$

(e) (x_n) je topološka baza za X i za svaki ograničen niz skalara $\Lambda = (\lambda_n)$ postoji neprekidan linearni operator $T_\Lambda : X \to X$ takav da vrijedi $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dokaz.
$\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$
Pretpostavimo da je (x_n) bezuvjetna baza za X. Neka je (a_n) njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala. Neka su $N \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{F}$ i $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N \in \{-1, +1\}$ proizvoljni. Neka je $x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$. Tada za $F = \{1, \cdots, N\}$ i $\mathcal{E} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_N\}$ vrijedi:

$$\|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n c_n x_n\| = [\text{jer je suma konačna}] = \|\sum_{n \in \mathbb{F}} \epsilon_n c_n x_n\| = \|S_{F,\mathcal{E}}\| \leqslant \sup_{F,\mathcal{E}} \|S_{F,\mathcal{E}}\| = \|x\|_{\mathcal{E}} \leqslant$$

$$\underset{4.1.5(f)}{\leqslant} \mathcal{K}_{\mathcal{E}} \|x\| = \mathcal{K}_{\mathcal{E}} \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|.$$

Dakle, tvrdnja (b) vrijedi za $+\infty \underset{4.1.5(b)}{>} C_1 = \mathcal{K}_{\mathcal{E}} \underset{4.1.9}{\geqslant} 1$.

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(c)}}$
Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (b). Neka su $N \in \mathbb{N}$ i $b_1, \cdots, b_N, c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{F}$ proizvoljni takvi da $|b_1| \leqslant |c_1|, \cdots, |b_N| \leqslant |c_N|$. Za svaki $n = 1, \cdots, N$ definiramo λ_n na način

da uzmemo $\lambda_n = 0$ ako $c_n = 0$ (tad je i $b_n = 0$) i $\lambda_n = \frac{b_n}{c_n}$ ako $c_n \neq 0$. U oba slučaja je $b_n = \lambda_n c_n$ i $|\lambda_n| \leqslant 1$. Definiramo i $\alpha_n = \mathrm{Re}(\lambda_n)$ te $\beta_n = \mathrm{Im}(\lambda_n)$.
Svi α_n su realni i vrijedi $|\alpha_n| \leqslant |\lambda_n| \leqslant 1$, pa po Carathéodoryjevom teoremu 1.4.2 postoje skalari $t_m \geqslant 0$ i $e_m^n \in \{-1, +1\}$ za $m = 1, \ldots, N+1$ i $n = 1, \ldots, N$ takvi da vrijedi:

$$\sum_{m=1}^{N+1} t_m = 1 \quad \text{i} \quad \sum_{m=1}^{N+1} \epsilon_m^n t_m = \alpha_n, \quad \text{za } n = 1, \ldots, N.$$

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} \|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n c_n x_n\| &= \|\sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N+1} \epsilon_m^n t_m c_n x_n\| = \|\sum_{m=1}^{N+1} t_m \sum_{n=1}^{N} \epsilon_m^n c_n x_n\| \leqslant \sum_{m=1}^{N+1} \|t_m \sum_{n=1}^{N} \epsilon_m^n c_n x_n\| = \\ &= \sum_{m=1}^{N+1} |t_m| \|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_m^n c_n x_n\| = \sum_{m=1}^{N+1} t_m \|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_m^n c_n x_n\| \underset{(b)}{\leqslant} \underbrace{\sum_{m=1}^{N+1} t_m}_{=1} C_1 \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| = \\ &= C_1 \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|. \end{aligned}$$

Analogno vrijedi i kada promatramo β_n pa se tako dobije:

$$\|\sum_{n=1}^{N} \beta_n c_n x_n\| \leqslant C_1 \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|.$$

Pa slijedi:

$$\begin{aligned} \|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| &= \|\sum_{n=1}^{N} \lambda_n c_n x_n\| = \|\sum_{n=1}^{N} (\alpha_n + \beta_n i) c_n x_n\| = \|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n c_n x_n + i \sum_{n=1}^{N} \beta_n c_n x_n\| \leqslant \\ &\leqslant \|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n c_n x_n\| + \|\sum_{n=1}^{N} \beta_n c_n x_n\| \leqslant 2C_1 \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja (c) vrijedi za $C_2 = 2C_1 \geqslant 2$.

$\boxed{\text{(c)} \Rightarrow \text{(a)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Neka je σ proizvoljna permutacija od $\mathbb{N}$. (x_n) je fundamentalan pa je i $(x_{\sigma(n)})$ fundamentalan te je $x_{\sigma(n)} \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, jer je $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prema 3.6.3 da bi $(x_{\sigma(n)})$ bila topološka baza dovoljno je pokazati da $\exists C_\sigma \geqslant 1$ takav da za $M, N \in N$ proizvoljne takve da $N \geqslant M$ i proizvoljne $c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(N)} \in \mathbb{F}$ vrijedi:

$$\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\| \leqslant C_\sigma \|\sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\|.$$

Neka su stoga $M, N \in N$ proizvoljni takvi da je $N \geqslant M$ i $c_{\sigma(1)}, \ldots, c_{\sigma(N)} \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Definiramo $c_n = 0$, $\forall n \notin \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}$, $L = \max\{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}$ i $\lambda_n = 1$ ako je $n \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}$ i $\lambda_n = 0$ ako je $n \notin \{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}$. Tada vrijedi:

$$\|\sum_{n=1}^{M} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\| = \|\sum_{n=1}^{L} \lambda_n c_n x_n\| \underset{(c)}{\leqslant} C_2 \|\sum_{n=1}^{L} c_n x_n\| = C_2 \|\sum_{n=1}^{N} c_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}\|.$$

Sada je dovoljno uzeti $C_\sigma = C_2 \geqslant 1$. Dakle, $(x_{\sigma(n)})$ je topološka baza za X pa zbog proizvoljnosti od σ slijedi da je (x_n) bezuvjetna baza.

$\boxed{\text{(c)} \Rightarrow \text{(d)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (c). Neka je $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan i $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{F}$ proizvoljni. Neka je $b_n = |c_n|$ za $n = 1, \ldots, N$. Tada je $N \geqslant N$, $|b_n| \leqslant |c_n|$ i $|c_n| \leqslant |b_n|$ za $n = 1, \ldots, N$ pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \underset{\text{(c)}}{\leqslant} C_2 \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| \underset{\text{(c)}}{\leqslant} {C_2}^2 \|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \\
\underset{:C_2>0}{\Longrightarrow}\quad &\frac{1}{C_2}\|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \leqslant \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| \leqslant C_2 \|\sum_{n=1}^{N} b_n x_n\| \\
\underset{b_n=|c_n|}{\Longrightarrow}\quad &\frac{1}{C_2}\|\sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n\| \leqslant \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| \leqslant C_2 \|\sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n\|.
\end{aligned}$$

Sada je dovoljno uzeti $C_3 = \frac{1}{C_2} \leqslant 1$ jer je $C_2 \geqslant 1$ i $C_4 = C_2 \geqslant 1$.

$\boxed{\text{(d)} \Rightarrow \text{(b)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (d). Neka su $N \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{F}$ i $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N \in \{-1, +1\}$ proizvoljni. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
&C_3 \|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n c_n x_n\| \underset{\text{(d)}}{\leqslant} C_3 C_4 \|\sum_{n=1}^{N} |\epsilon_n c_n| x_n\| = C_4 C_3 \|\sum_{n=1}^{N} |c_n| x_n\| \underset{\text{(d)}}{\leqslant} C_4 \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\| \\
\underset{:C_3>0}{\Longrightarrow}\quad &\|\sum_{n=1}^{N} \epsilon_n c_n x_n\| \leqslant \frac{C_4}{C_3} \|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\|.
\end{aligned}$$

Sada je dovoljno uzeti $C_1 = \frac{C_4}{C_3} \geqslant 1$ jer je $C_4 \geqslant 1$ i $\frac{1}{C_3} \geqslant 1$ zbog $0 < C_3 \leqslant 1$.

$\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(e)}}$

Pretpostavimo da je (x_n) bezuvjetna baza za X. Tada je (x_n) topološka baza za X. Neka je (a_n) njen pridruženi niz koeficijentnih funkcionala, $\Lambda = (\lambda_n)$ proizvoljan ograničeni niz skalara i $0 \leqslant M = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| < +\infty$. Za $M \neq 0$ neka je $\Lambda_2 = (\frac{\lambda_n}{M})$, tada je $|\frac{\lambda_n}{M}| = \frac{|\lambda_n|}{M} \leqslant \frac{M}{M} = 1$. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Sada jer je (x_n) bezuvjetna baza, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) x_n$ konvergira bezuvjetno pa prema 2.2.9 $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n(x)x_n$ konvergira. Zato možemo definirati $T_\Lambda : X \to X$ s:

$$T_\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n(x)x_n, \quad \forall x \in X.$$

T_Λ je očito linearan. Ako je $M = 0$ onda je $T_\Lambda = 0$ pa je neprekidan. A za $M \neq 0$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
||T_\Lambda(x)|| &= ||\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n(x)x_n|| = M||\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{M} a_n(x)x_n|| = M|| \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{M} a_n(x)x_n|| = \\
&= M \lim_{N\to+\infty} ||\sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n}{M} a_n(x)x_n|| = M \lim_{N\to+\infty} ||S_{\{1,\dots,N\},\Lambda_2}(x)|| \leqslant M \sup_{N\in\mathbb{N}} ||S_{\{1,\dots,N\},\Lambda_2}(x)|| \leqslant \\
&\leqslant [\text{supremum skupa je manji ili jednak supremumu nadskupa}] \leqslant \\
&\leqslant M \sup_{F,\Lambda} ||S_{F,\Lambda}(x)|| \leqslant M \sup_{F,\Lambda} ||S_{F,\Lambda}|| ||x|| \underset{4.1.5(b)}{=} M\mathcal{K}_\Lambda ||x|| \underset{4.1.5(b)}{<} +\infty.
\end{aligned}$$

Dakle, T_Λ je uvijek neprekidan. A za $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan vrijedi:

$$T_\Lambda(x_n) = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m a_m(x_n)x_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \delta_{m,n} x_m = \lambda_n x_n.$$

$\boxed{\text{(e)}\Rightarrow\text{(a)}}$

Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (e). Neka je (a_n) pridruženi niz koeficijentnih funkcionala od (x_n). Neka je $\Lambda = (\lambda_n)$ proizvoljan niz skalara za koje vrijedi $|\lambda_n| \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prema pretpostavci postoji neprekidan linearni operator $T_\Lambda : X \to X$ takav da vrijedi $T_\Lambda(x_n) = \lambda_n x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sada za $x \in X$ proizvoljan vrijedi:

$$\begin{aligned}
T_\Lambda(x) &= T_\Lambda(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) T_\Lambda(x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)\lambda_n x_n = \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n(x)x_n
\end{aligned}$$

pa slijedi da $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n a_n(x)x_n$ konvergira. Zbog proizvoljnosti od Λ prema 2.2.9 sada slijedi da $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)x_n$ konvergira bezuvjetno. A zbog proizvoljnosti od $x \in X$ slijedi da je (x_n) bezuvjetna baza za X. □

4.3 Schauderov sustav

Primjer 4.3.1. *Scahuderov sustav u $C[0,1]$ (s normom uniformne konvergencije) je niz funkcija iz podskupa od $C[0,1]$:*

$$\{\chi, l\} \cup \{s_{n,k}\}_{n\geqslant 0, k=0,\ldots,2^n-1},$$

u poretku $(\chi, l, s_{0,0}, s_{1,0}, s_{1,1}, s_{2,0}, \ldots, s_{2,3}, \ldots)$ gdje su funkcije definirane s:

$$\begin{aligned}
\chi(t) &= \chi_{[0,1]}(t), \\
l(t) &= t, \\
s_{n,k} &= \begin{cases} 1, & t = \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}, \\ \textit{linearna,} & na \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}\right] \ i \ na \left[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right], \\ 0, & ina\check{c}e. \end{cases}
\end{aligned}$$

Schauderov sustav je uvjetna baza za $C[0,1]$.

Dokaz. [6, str. 142, Definition 4.22 i str. 184, 6.3] □

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, svibanj 2015., http://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/onp/predavanja/onp-1415-final.pdf, (lipanj 2015.).

[2] A. Barvinok, *A Course in Convexity*, Graduate Studies in Mathematics, sv. 54, American Mathematical Society, Providence, 2002.

[3] H. Dym i H. P. McKean, *Fourier Series and Integrals*, Probability and Mathematical Statistics, sv. 14, Academic Press, London, New York, 1972.

[4] P. Enflo, *A Banach space with basis constant > 1*, Arkiv för Matematik **11** (1973), br. 1, 103–107.

[5] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, siječanj 1998., http://people.math.gatech.edu/~heil/papers/bases.pdf, (lipanj 2015.).

[6] ______, *A Basis Theory Primer: Expanded Edition*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Springer Science+Business Media, New York, 2011.

Sažetak

U ovome radu su izloženi neki temeljni rezultati o topološkim bazama na Banachovim prostorima. Glavni alati koji se pritom koriste su osnovni rezultati iz teorije normiranih prostora poput Hahn-Banachovog teorema i principa uniformne ograničenosti. Ključno pokazano svojstvo topoloških baza je neprekidnost koeficijenata iz zapisa vektora preko baze (s obzirom na te vektore). Opisane su veze između topoloških baza i njima po svojstvima sličnih nizova. Posebno je opisana jedna posebna klasa topoloških baza: bezuvjetne baze za koje konvergencija ne ovisi o poretku elemenata baze.

Summary

In this thesis we have presented some fundamental results about topological bases in Banach spaces. Main tools used for that are fundamental results from theory of normed spaces such as Hahn-Banach theorem and uniform boundedness theorem. We have presented key property of topological bases which states that the coefficients from basis representations of vectors are continuous (with respect to those vectors). We have described some relations between topological bases and some other types of sequences that are similar to topological bases. In the end one special class of topological bases was described: unconditional bases for which convergence doesn't depend on the ordering of the elements in the basis.

Životopis

Rođen sam 7.1.1992. u Zagrebu. Završio sam OŠ Savski Gaj i V. gimnaziju u Zagrebu. Tijekom osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja sudjelovao sam na državnim natjecanjima iz matematike, fizike, logike i informatike.

Upisao sam studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu 2010. godine. Na završnoj godini preddiplomskog studija sam dobio nagradu za najbolje studente završnih godina studija matematičkog odsjeka. Više puta sam sudjelovao studentskim natjecanjima iz matematike International Mathematics Competition i Vojtěch Jarník International Mathematical Competition. Tijekom studija sam također bio demonstrator na 6 kolegija i držao sam dodatnu nastavu iz matematike jednoj generaciji učenika V. gimnazije.